2/

1935 № 4

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

## СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



# BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

## DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

МОСКВА — ЛЕНИНГРАД
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

Ш. Е. Микеладзе. О корнях функции, определяемой дифференциальным уравнением. ИМЕН, 1935, № 4, стр. 559.

Ch. Mikeladze. Sur les racines d'une fonction déterminée par une équation différentielle. BAS-MN, 1935, № 4, p. 559 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Июль 1935 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*



Ответственный редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор А. М. Налетов

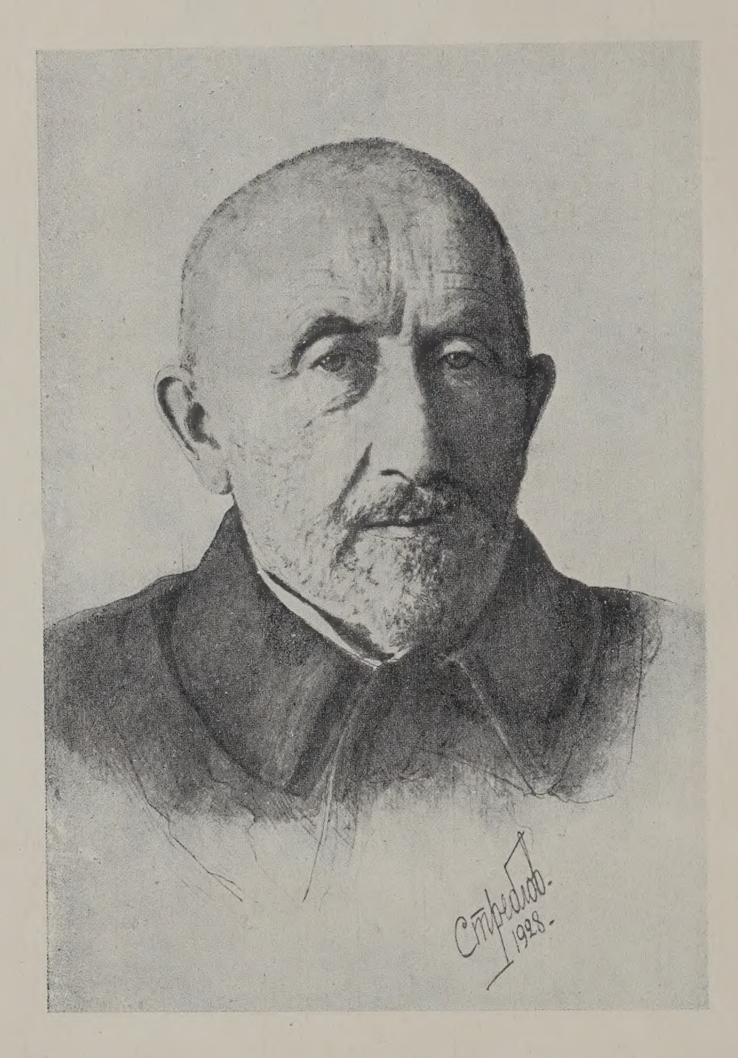
Начато набором в апреле 1935 г. — Подписано к печати 20 июля 1935 г.

196 (477—672) стр. (15 фиг.) + 1 портрет

Формат бум. 72 × 110 см. — $12^1/_4$ печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 3000

Ленгорлит № 20246. — АНИ № 950. — Заказ № 1834

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12



*Проф. О. Хвольсон*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# ПОЧЕТНЫЙ ЧЛЕН АКАДЕМИИ НАУК СССР ОРЕСТ ДАНИЛОВИЧ ХВОЛЬСОН

## КРАТКОЕ СЛОВО ПО ПОВОДУ ЕГО КОНЧИНЫ[1]

Д. С. РОЖДЕСТВЕНСКОГО

27 мая 1934 г. скончался профессор Орест Данилович Хвольсон, почетный член Академии Наук СССР. Жизнь его протекала на наших глазах, и мы все знаем его исключительные заслуги в деле развития физики в нашем Союзе. Большинство членов Академии — его ученики, или в прямом значении слова, так как слушали его замечательные лекции, или в переносном, так как изучали физику по еще более замечательному его курсу. Да позволено мне будет оживить в памяти его учеников эту импозантную фигуру ученого, работоспособность которого стала легендарной. И не только работоспособность, а неустанная, ненасытная жажда к работе, которая заставляла его строить и координировать всю свою жизнь так, чтобы создавать наибольшую сумму возможного и даже невозможного. Здесь как бы уже не желание или жажда, а непреоборимый инстинкт к работе.

Вместе с тем до самых последних мгновений его жизни — поразительная свежесть ума и та же точность выражений, та же отчетливость и продуктивность в работе, как и в молодые годы. Накануне смерти, в возрасте 81 года, наполовину слепой, Орест Данилович, редактируя последнее издание первого тома своего курса, создавая его в сущности наново, дал быть может самое свежее во всем мире систематическое оформление физических идей, бурное развитие которых, своей стремительностью, своими всплесками и пеной, можно сказать, теперь валит с ног и старых и молодых.

Полноценности его жизни можно поистине завидовать и с почтением изумляться. Представим себе физику сорок лет тому назад. Не только без достижений последних лет, без понимания атомов, без нейтронов, без положительных электронов и т. д., но даже просто без радиоактивности, физику до обычных

[1] Произнесено в заседании Общего собрания 18 декабря 1934 г.

наших отрицательных электронов и даже до рентгеновых лучей. Хочется по сравнению с настоящим моментом сказать: да самой физики тогда не было. Представим себе это время особенно в тогдашней России, где буквально не было книг по нашей науке, где нечего было читать и где молодежь — я это испытал сам — не знала, как добраться до скудных знаний той поры. Какая гигантская работа проделана за эти сорок лет во всем мире и в особенности в нашем Союзе! И о ком из русских физиков можно сказать, что ему принадлежит львиная доля, почетная доля в работе освоения этого громадного материала — всей физики в сущности — в нашей стране, сорок лет тому назад голой, теперь вооруженной почти не хуже стран долгой культуры? Чье влияние сильнее всего создало неоспоримый исторический факт: 40 лет тому назад физиков в России почти не было, а теперь их в нашем Союзе полки?

Всякий, кто эти долгие годы пользуется курсом Хвольсона, у кого он нормально не сходит со справочной полки, кто сотни раз заставлял и заставляет своих учеников — и начинающих и уже готовых исследователей — усваивать и учиться и размышлять над курсом Хвольсона, отчетливо знает, какую глубокую роль, подчас невидную, почти подземную, а подчас яркую, сыграл его курс за это время. Не меньше половины гигантской работы подъема физики в Союзе принадлежит одному человеку: нашему учителю Оресту Даниловичу Хвольсону.

Нужно только подумать: полвека тому назад не было практически ничего, и сразу, в несколько лет, как бы по волшебству, вырос первоклассный всеобъемлющий курс, энциклопедия, переведенная на главнейшие европейские языки, прославленная всюду среди других курсов. Так явилось в нашей стране по физическим наукам столь могучее орудие культуры, какого у других стран и в помине не было на соответствующем уровне развития. Да и теперь такое орудие еще имеется не всюду. В течение десятков лет силами одного курс этот поддерживался на уровне последнего слова науки и педагогически безупречного изложения во всех многочисленных своих изданиях и переизданиях, в своих дополнениях и добавочных книгах во всех странах. Если мы примем во внимание то давление, какое оказывала энциклопедия Хвольсона во всем мире, можно сказать — ему удалось то, чего не достигал больше никто и никогда, — и при том на протяжении почти 40 лет. Мы знаем курсы в других науках, по которым целыми десятилетиями учится мир, напр. курс ботаники Страсбургера. Но они быстро становятся коллективными трудами. К тому же такие курсы никогда не носили того характера обширной энциклопедии, какой имел курс Хвольсона.

Но у нас в СССР влияние профессора Ореста Даниловича Хвольсона было еще значительно больше, чем то определило бы печатное создание его жизни. В данный момент в СССР половина физиков — его ученики непосредственные по аудитории Физического института Ленинградского университета, в таинства физики введенные его словом, его систематическими ясными точными формулиров-

ками, которые не только не допускали тумана неотчетливого знания вокруг основных принципов, но не оставляли непонятных мельчайших закоулков мысли. Сжатые и суровые, лекции его вместе с тем очаровывали его слушателей, прежде всего начинающих. Потому что, как профессор, Орест Данилович долго, долго, десятки лет и до глубокой старости, не выпускал из рук своих право вводить всех ищущих физики в эту трудную науку в своем общем курсе. Очаровывали его лекции глубокими связями между отдельными построениями, отдельными, иногда простыми, обыденными, формулами.

Те, кто подпадали влиянию его лекций, их никогда не забывали. Аудитория его всегда была переполнена.

Он был лектор и преподаватель по призванию. Он любил говорить, что главный его талант — талант педагога. Никакое педагогическое начинание в области преподавания физики не проходило без его участия. Вернее, не иначе, как по его инициативе и под его руководством, они все — так Педагогическое отделение при Русском Физико-химическом обществе, так преподавательские съезды, так среднешкольные комиссии — возникали и работали.

Эти два момента, молодой и свежий курс и всегда обаятельные лекции — были тем главным, для чего и чем жил Орест Данилович в течение долгого служения преподаванию в Ленинградском университете, от студенческой скамьи и до самой смерти, а особенно последние 40 лет, посвященные служению физике во всем Союзе нашем и во всем мире. Курс его со всеми многосложными изданиями и обновлениями во всех переводах на все языки можно приравнять десяткам толстых томов. Но все же эти два главных дела не могли насытить и утолить инстинкта его неустанной и непрерывной работы. Она неизмеримо больше. Мы еще не говорили о тех 40 ученых работах, преимущественно по магнитным явлениям, по теплопроводности и по принципам измерения радиации, которых было бы уже достаточно, чтобы наполнить жизнь ученого обычной работоспособности. Актинометрами его до сих пор работают в обсерваториях, после некоторых видоизменений, принесенных десятилетиями. Работы его по теплопроводности пользуются известностью.

Кроме того, ему принадлежит еще десяток книг и еще сотни популярных изданий.

Как мы видим, действительно правильно было сказано выше, что половину гигантской работы подъема физики в СССР на современную высоту вынес на своих плечах этот изумительный работник.

В этих кратких воспоминаниях о почетном члене Академии Наук Оресте Даниловиче Хвольсоне, учителе моем и других членов Академии, я хотел бы чтобы все вместе со мной почувствовали и поняли, как много обязаны этому исключительному человеку мы все, вся наша страна.

---

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

## ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА ПАВЛА ПАВЛОВИЧА ФЕДОТЬЕВА[1]

И. В. ГРЕБЕНЩИКОВА

В ночь на 20 марта 1934 г. скоропостижно скончался член-корреспондент Академии Наук СССР Павел Павлович Федотьев.

П. П. Федотьев родился 9 июня 1864 г. в городе Благовещенске в семье старшего фельдшера.

Первоначальное образование П. П. получил в Омской военной гимназии, после которой сразу поступил в Николаевское инженерное училище. Казалось, что поступление в Инженерное училище уже определяло его дальнейшую карьеру, но через год пребывания в училище П. П. бросает его и переходит на Химический факультет Петроградского Технологического института, которое и кончает в 1888 г.

Всю остальную жизнь П. П. работает как химик. С 1889—1903 г. он занимает ряд должностей на различных химических предприятиях, начиная от зав. лабораторией и кончая зав. отдельными большими цехами. В это время П. П. завоевывает себе имя инженера-химика-практика, и когда пришлось искать для созданного в Петербурге Политехнического института с его превосходными лабораториями преподавателя технической химии, то выбор останавливается на П. П. Федотьеве.

Поступление в Политехнический институт круто изменяет деятельность П. П. Он становится не только инженером-практиком, но и экспериментатором, учителем и организатором новых химических производств. Получив химическое образование в 80-х гг., он чувствует необходимость вновь пополнить свое образование развившимися физико-химическими дисциплинами. Он едет 40 лет от роду, после 16-летней славной практической деятельности, в Лейпциг и работает в Оствальдовском Физико-химическом институте. На всех дальнейших работах П. П. мы уже видим следы этого пребывания за границей и пополненного там физико-химического образования.

[1] Доложено в заседании ОМЕН 17 декабря 1934 г.

Во время заграничной командировки он знакомится с крупной химической промышленностью Европы и посещает многочисленные химические заводы Германии, Австрии, Швеции, Бельгии и Франции.

Педагогическая деятельность П. П. протекала главным образом в Политехническом институте. С его именем связывается организация лаборатории по технической электрохимии и электрометаллургии и лаборатории по минеральной технологии, ставших хорошо известными благодаря большому количеству прекрасных научно-экспериментальных работ, вышедших из их стен, и созданию целой школы электрохимиков и электрометаллургов.

Будучи крупным специалистом по минеральной технологии, П. П. принимает активнейшее участие в реконструкции нашей химической промышленности и организует новые для Союза виды производства — алюминий, бертолетова соль и пр.

Перу П. П. принадлежат многочисленные курсы по различным вопросам химической технологии и руководства, содержащие многочисленный, очень цен, ный практический материал, обычно проверенный автором.

При личных сношениях П. П. Федотьев производил впечатление человека угрюмого, замкнутого, с настойчивым характером. Черты эти, во всяком случае отнюдь не мешали плодотворной совместной работе П. П. с сотрудниками и близко знавшими его учениками, неизменно относившимися к нему с глубоким уважением и любовью. Это был человек дела, не эмоции. Его надо расценивать по тому, что им сделано, а сделано им очень много, и память о нем будет существовать долгие годы, особенно в советской электрохимической промышленности.

---

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# ÜBER ASYMPTOTISCHE GESETZE DER „ALLGEMEINEN" DIOPHANTISCHEN ANALYSE MIT VIELEN UNBEKANNTEN

## 1. Mitteilung. Abschätzung der mehrfachen Gausschen Summen

Von W. TARTAKOWSKY

(*Présenté par* I. Vinogradov, *membre de l'Académie*)

### EINLEITUNG

### § 1. Die Verallgemeinerung der Eulerschen Methode

Die Eulersche Methode in dem Problem der Darstellung der Zahlen durch Polynome kann als eine Summenumformung aufgefasst * und folgendermassen allgemein dargestellt werden:

$$f(x_1, \ldots x_\sigma) = \sum_{(H)} x_1^{F_1(h_1, \ldots h_s)} \ldots x_\sigma^{F_\sigma(h_1, \ldots h_s)} =$$

(1)

$$= \sum_{\lambda=1}^{\sigma} \sum_{j_\lambda = j'_\lambda(H)}^{j''_\lambda(H)} r(F_1, \ldots F_\sigma; H; j_1, \ldots j_\sigma)\, x_1^{j_1} \ldots x_\sigma^{j_\sigma}.$$

Da sind: 1) $F_1(h_1, \ldots h_s), \ldots F_\sigma(h_1, \ldots h_s)$ beliebige Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten; 2) $(H)$ ist eine Punktmenge des Gitters, die aus «ganzen» Punkten des $s$-dimensionalen Raumes gebildet ist;** 3) $r(F_1, \ldots F_\sigma; H; j_1, \ldots j_\sigma)$ ist die Anzahl der Wertsysteme $(h_1, \ldots h_s)$ aus $(H)$, die gleichzeitig $F_1$ in $j_1, \ldots F_\sigma$ in $j_\sigma$ verwandeln; 4) $j'_\lambda(H)$ ist der kleinste und $j''_\lambda(H)$ der grösste Wert von $F_\lambda(h_1, \ldots h_s)$ in $(H)$; man kann sie auch durch $-\infty$ und $+\infty$ ersetzen. Die Gleichung (1) kann für gewisse $(H)$ und $F_1, \ldots F_\sigma$ sinnlos werden, z. B. wenn $(H)$ das ganze Gitter, $\sigma = 1$ und $F_1 = F(h_1, \ldots h_s)$ eine indefinite quadratische Form ist. Wenn aber in der Identität (1) die rechte Seite in einem gewissen

* Siehe: W. Tartakowsky. Expression analytique pour le nombre des représentations d'un système des nombres par un système des formes quadratiques positives additives. C. R. 1931.

** Wir werden in folgendem unter einem «ganzen» Punkt eines Raumes, einen Punkt verstehen, dessen alle Koordinaten ganze Zahlen sind.

Bereiche um den Anfangspunkt des $(x_1, \ldots x_\sigma)$-Raumes absolut konvergiert, so gibt uns die Causchysche Formel:

$$(2) \qquad r(F_1, \ldots F_\sigma; H; j_1, \ldots j_\sigma) = \frac{1}{(2\pi i)^\sigma} \int \cdots \int_{(C)} \frac{f(x_1, \ldots x_\sigma)}{x_1^{j_1+1} \ldots x_\sigma^{j_\sigma+1}} dx_1 \ldots dx_\sigma.$$

Da ist $(C)$ ein zweckmässig gewählter Integrationsbereich. Am einfachsten ist für $(C)$ ein Zylinderbereich zu wählen, dessen Kreise: $|x_1| = r_1$; $|x_2| = r_2$; ... ... $|x_\sigma| = r_\sigma$ man der Woronoischen Schneidung unterwirft, was den wahren Kern der Hardy-Littlewood'schen Methode bildet. In dieser Arbeit setzen wir: $r_1 = r_2 = \ldots r_\sigma = 1$.*

Diese Fragestellung zeigt, dass die Euler-Hardy-Littlewood'sche Ideen nicht nur auf additive und definite, sondern auf allgemeine Probleme anwendbar sind.

In dieser Arbeit werde ich den Fall behandeln, wo $\sigma = 1$ und $F_1$ gleich einer «allgemeinen Form»: $F(h_1, \ldots h_s) = \sum_{i_1, \ldots i_k = 1}^{s} a_{i_1, \ldots i_k} h_{i_1} \ldots h_{i_k}$ ist (die Koeffizienten $a_{i_1, \ldots i_k}$ hängen von der Reihenfolge der Indices $i_1, \ldots i_k$ nicht ab). Unter einer «allgemeinen» Form wird eine beliebige Form mit ganzzahligen Koeffizienten verstanden, die im Raume der Koeffizienten dieser Form $(a_{i_1, \ldots i_k})$ gewissen algebraischen Mannigfaltigkeiten, dessen Dimension kleiner ist, als die Dimension des Koeffizientenraumes selbst, nicht zugehört. Es ist bemerkenswert, dass im Falle der Indefinität der Form, asymptotische Gesetze auch für die Darstellung der kleinen Zahlen gelten.

## § 2

Wir betrachten die Schneidung $(L)$ der asymptotischen Kegel: $F(h_1, \ldots h_s) = 0$ mit der Sphäre $(F): h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_s^2 = 1$ (im Falle einer definitiven Form $F$ degeneriert die Kegel in den Anfangspunkt $(0, 0, \ldots 0)$ und $(L)$ ist eine lehre Menge). Wegen der Endlichkeit und Stetigkeit der Form $F$ auf $(F)$, ist $(L)$ die Grenze der Menge $(F) - (L)$. Es gibt unendlich viele Grundparallelotope, dessen Anfangswinkel die Menge $(F) - (L)$ nur in ihren inneren Punkten trifft. Wenn man die Kanten dieses Parallelotops als neue Koordinatenaxen nimmt $(h_1', \ldots h_s')$, so war in der bis jetzt gewöhnlichen Fragestellung als $(H)$ der positive, Koordinatewinkel gewählt: $h_1' \geqslant 0$; ... $h_s' \geqslant 0$. Damit wird auch im Falle einer indifiniten Form (z. B. das Waringsche Problem für einen ungeraden Grad) das Problem der Zahlendarstellung ganz analog dem Falle einer definiten Form behandelt. Damit aber bleibt nicht gelöst das Problem der Dar-

* Soviel ich weiss, der erste, der als Integrationsweg den Einheitskreis wählte, war I. Winogradov.

stellung der kleinen Zahlen. Darum wählen wir für $(H)$ den Würfel: $|h_i| \leqslant m$ $(i = 1, 2, \ldots s)$. Wir wollen ihn, im folgenden, den Hauptwürfel nennen. Die erzeugende Eulersche Funktion ist:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{h_1 \ldots h_s = -m}^{+m} x^{F(h_1, \ldots h_s)} = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} r(F; m; j) x^j.$$

Die Formel (2) § 1 bekommt die Gestalt:

$$r(F; m; \nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \frac{f(x)\,dx}{x^{\nu+1}}$$

Wir führen auf diesem Kreise: $|x| = 1$ die Woronoische Schneidung, deren Ordnung $N = m^{k-1+\alpha}$ ist $(0 < \alpha < 1)$, aus.

Wir wählen nämlich auf dem Kreise alle primitiven Einheitswurzeln $\rho = e^{2\pi i \frac{l}{q}}$ (wo $l$ und $q$ teilerfremd sind) vom Grade $q \leqslant N$. Seien $\rho_1 = e^{2\pi i \frac{l_1}{q_1}}$ und $\rho_2 = e^{2\pi i \frac{l_2}{q_2}}$ zwei zu $\rho$ nächste Einheitswurzeln unserer Reihe, $\rho_1$ — links, $\rho_2$ — rechts von $\rho$. Wir bilden neue Einheitswurzeln $\rho' = e^{2\pi i \frac{l+l_1}{q+q_1}}$ und $\rho'' = e^{2\pi i \frac{l+l_2}{q+q_2}}$. Der Kreisbogen, der von $\rho'$ und $\rho''$ begrenzt ist, enthält $\rho$. Wir nennen diesen Bogen der Woronoische Bogen oder Bereich der Einheitswurzel $\rho$. Die Gesamtheit solcher Bogen für alle unsere $\rho$ decken den Kreis ohne Lücken und ohne einander zu decken. Solch eine Schneidung des Kreises auf Bogen, die den Einheitswurzeln zugehören, wollen wir «die Woronoische Schneidung» nennen. Wir werden weiter die Eigenschaften dieser Schneidung als bekannt voraussetzen.* Alle so gewonnene Bogen verteilen wir in grosse Bogen (maior arcus) und kleine Bogen (minor arcus) je nach der Grösse der Ordnung $q$ der Einheitswurzel, welcher der Bogen zugehört.

## § 3

In dieser ersten Mitteilung wird die Abschätzung von Gausschen Summen, insbesondere von stark abgeschnittenen Gausschen Summen gegeben. In dieser Abschätzung steckt die Hauptschwierigkeit des Problems. In dieser Arbeit ist die Abschätzung gegeben mit Hilfe der geometrischen Methoden der Punktgittertheorie und der algebraischen Methoden der Eliminationstheorie. Gewisse, soviel ich weiss, neue Sätze der Eliminationstheorie, auf die ich mich in dieser Mitteilung stütze, werde ich in einer besonderen, der Eliminationstheorie gewidmeten, Abhandlung publizieren. Die von mir gefundene Abschätzung ist sehr schwach. Man kann hoffen, dass eine viel bessere Abschätzung existieren soll.

* Siehe: E. Landau. Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 1, SS. 98—100.

Das erste Kapitel der zweiten Mitteilung wird dem «Inhaltsvariation-Lemma», nämlich der Abschätzung der Veränderung des Inhaltes der Schale, die zwischen den Flächen $F=\alpha$ und $F=\alpha+1$ im Inneren des Hauptwürfels enthalten ist, wenn man den Parameter $\alpha$ verändert, gewidmet sein. Dieses Lemma setzt ins Licht die echte Natur des Grössenfaktors, der im Hauptgliede von $r(F, m, \nu)$ vor dem singular Series steht. Damit wird gezeugt, dass die asymptotische Art der Gesetze nicht zu der Grösse der darstellbaren Zahl, sondern zu der Grösse des Inhalts der Fläche, auf welcher man ganze Punkte sucht, gehört.

Im zweiten Kapitel der zweiten Mitteilung wird der Hauptglied des Integrals (2) § 2 ausgesondert und der Restglied abgeschätzt, womit die folgende Formel gewonnen wird:

$$(1) \qquad r(F, m, \nu) = \Delta V(\nu, m) \,.\, \mathfrak{S}(F, \nu) + 0\,(m^{s-k-\bar{c}_k}).$$

Die Zahl $\bar{c}_k$ ist positiv und von $m$ unabhängig. Da ist $\Delta V(\nu, m)$ der Inhalt der Schale, die zwischen den Flächen $F=\nu-\frac{1}{2}$ und $F=\nu+\frac{1}{2}$ im Inneren des Hauptwürfels enthalten ist. $\mathfrak{S}(F, \nu)$ — ist die sogenannte singular Series, die eine zweifache Definition zulässt:

$$(2) \qquad \mathfrak{S}(F, \nu) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^s} \sum_{(l,q)=1}^{1 \leq l \leq q} S_\rho \, \rho^{-\nu} = \prod_{p=2,3,5\ldots}^{\infty} \chi_p(F, \nu)$$

Da ist: $\rho = e^{2\pi i \frac{l}{q}}$ eine Einheitswurzel. $S_\rho$ ist die volle Gaussche Summe:

$$S_\rho = \sum_{h_1, \ldots h_s = 0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{l}{q} F(h_1, \ldots h_s)}$$

$(l, q)$ ist das Symbol des grössten gemeinschaftlichen Teiles der zwei Zahlen $l$ und $q$. Das Produkt ist über alle Primzahlen $p$ erstreckt.

$$\chi_p(F, \nu) = \lim_{\lambda \to \infty} p^{-\lambda(s-1)} N(p^\lambda; F; \nu).$$

Da ist $N(p^\lambda; F; \nu)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz:

$$F(h_1, \ldots h_s) \equiv \nu \pmod{p^\lambda}; \; h_1, \ldots h_s = 0, 1, 2, \ldots (p^\lambda - 1)$$

Die arithmetische Untersuchung von $\mathfrak{S}(F, \nu)$ gibt uns die Bestimmung der Gesamtheit der Zahlen, die durch die Form $F(h_1, \ldots h_s)$ darstellbar sind. Diesem Problem hoffe ich die dritte Mitteilung zu widmen. Die Resultate dieser

Untersuchung sind analog den Resultaten, die ich in Bezug auf die quadratischen Formen gefunden habe.*

## I KAPITEL

### § 1. Das Gaussche Diagonalerverfahren und die Weylsche Recursionsmethode

Das Gaussche Diagonalverfahren wendet man an bei der Abschätzung des absoluten Betrags der Gausschen Summen:

$$S = f\left(e^{2\pi i \frac{l}{q}}\right) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{x_i=-m_i}^{+M_i} e^{2\pi i \frac{l}{q} F(x_1, \dots x_s)}; \ (l, q) = 1; \quad m_i > 0; \quad M_i > 0; \tag{1}$$

$$m_i < \frac{m}{2}; \ M_i < \frac{m}{2}$$

und besteht aus der Substitution:

$$x_i = x_i^{(1)} + h_i^{(1)} \quad (i = 1, 2, \dots s),$$

die man in der folgenden Formel ausführt:

$$|S|^2 = |f(x)|^2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{x_i=-m_i}^{+M_i} e^{2\pi i \frac{l}{q} F(x_1, \dots x_s)} \cdot \sum_{j=1}^{s} \sum_{x_j^{(1)}=-m_j}^{+M_j} e^{-2\pi i \frac{l}{q} F(x_1^{(1)}, \dots x_s^{(1)})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{s} \sum_{h_i^{(1)}=-m}^{+m} \left| \sum_{j=1}^{s} \sum_{x_j^{(1)}=-m_j^{(1)}(h_j^{(1)})}^{+M_j^{(1)}(h_j)^{(1)}} e^{2\pi i \frac{l}{q} \left[ \sum_{\gamma=1}^{s} \frac{1}{\gamma!} \sum_{\alpha_1, \dots \alpha_\gamma=1}^{s-1} h_{\alpha_1}^{(1)} \dots h_{\alpha_\gamma}^{(1)} \frac{\partial^{(\gamma)} F}{\partial h_{\alpha_1}^{(1)} \dots \partial h_{\alpha_\gamma}^{(1)}} \right]} \right|$$

da sind die Zahlen $-m_j^{(1)}(h_j^{(1)})$ und $M_j^{(1)}(h_j^{(1)})$ der kleinste und der grösste Wert, die $x_j^{(1)}$ bekommen kann, wenn $h_j^{(1)}$ fixiert ist, oder algebraisch $-m_j^{(1)}(h_j^{(1)}) = \max(-m_j, -m_j - h_j^{(1)})$; $M_j^{(1)}(h_j^{(1)}) = \min(M_j, M_j - h_j^{(1)})$; wir setzen: $m = 2 \max(m_1, \dots m_s, M_1, \dots M_s)$. Den Summenteil für jedes Wertsystem $(h_1^{(1)} \dots h_s^{(1)})$ wollen wir durch:

$$S(h_1^{(1)} \dots h_s^{(1)}) = S(h^{(1)}),$$

und:

$$\sum_{\gamma=1}^{s-1} \frac{1}{\gamma!} \sum_{i_1, \dots i_\gamma=1}^{s} h_{i_1}^{(1)} \dots h_{i_\gamma}^{(1)} \frac{\partial^\gamma F}{\partial h_{i_1}^{(1)} \dots \partial h_{i_\gamma}^{(1)}} = \Delta_{h^{(1)}} F(x^{(1)})$$

* Siehe: W. Tartakowsky. Die Bestimmung der Gesamtheit der Zahlen, die durch eine quadratische definite Form $F(x_1 x_2 \dots x_s)$ $(S \geqslant H)$ darstellbar sind. Изв. Акад. Наук СССР, 1930; W. Tartakowsky. La détermination de la totalité des nombres etc. C. R., 1931.

bezeichnen. Das Gaussche Diagonalverfahren gibt also für den Modul der Gausschen Summe die folgende Abschätzung:

(2)
$$|S|^2 = |f(x)|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{s} \sum_{h_i^{(1)}=-m}^{+m} \left| \sum_{j=1}^{s} \sum_{x_j^{(1)}=-m_j^{(1)}(h_j^{(1)})}^{M_j^{(1)}(h_j^{(1)})} e^{2\pi i \frac{l}{q} \Delta_{h_i^{(1)}} F(x^{(1)})} \right| = \sum_{i=1}^{s} \sum_{h_i^{(1)}=-m}^{+m} |S(h^{(1)})|.$$

Der Gewinn besteht in dem Abnehmen des Grades des im Exponent stehenden Polynoms.

H. Weyl wendete die Formel (2) zu $S(h^{(1)})$ wieder an und so weiter:

$$|S(h^{(1)})|^2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{x_i^{(1)}=-m_i^{(1)}(h_i^{(1)})}^{M_i^{(1)}(h_i^{(1)})} e^{2\pi i \frac{l}{q} \Delta_{h^{(1)}} F(x^{(1)})} \cdot \sum_{j=1}^{s} \sum_{x_j^{(2)}=-m_j^{(1)}(h_j^{(1)})}^{+M_j^{(1)}(h_j^{(1)})} e^{-2\pi i \frac{l}{q} \Delta_{h^{(1)}} F(x^{(2)})} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \sum_{h_i^{(2)}=-m}^{+m} \left| \sum_{j=1}^{s} \sum_{x_j^{(2)}=-m_j^{(2)}(h_j^{(1)},\, h_j^{(2)})}^{+M_j^{(2)}(h_j^{(1)},\, h_j^{(2)})} e^{2\pi i \frac{l}{q} \left[ \sum_{\gamma_1=1}^{s-1} \sum_{\gamma_2=1}^{s=\gamma} \frac{1}{\gamma_1!} \cdot \frac{1}{\gamma_2!} \sum_{\alpha_1^{(1)}, \ldots \alpha_{\gamma_1}^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \ldots \alpha_{\gamma_2}^{(2)}=1}^{s} h^{(1)}_{\alpha_1^{(1)}} \ldots h^{(1)}_{\alpha_{\gamma_1}^{(1)}}, h^{(2)}_{\alpha_1^{(2)}} \ldots h^{(2)}_{\alpha_{\gamma_2}^{(2)}} \frac{\partial^{\gamma_1+\gamma_2} F}{\partial h^{(1)}_{\alpha_1^{(1)}} \ldots \partial h^{(1)}_{\alpha_{\gamma_1}^{(1)}} \partial h^{(2)}_{\alpha_1^{(2)}} \ldots \partial h^{(2)}_{\alpha_{\gamma_2}^{(2)}}} \right]} \right|.$$

Wir bezeichnen:

$$\sum_{\gamma_1=1}^{s-1} \sum_{\gamma_2=1}^{s-\gamma_1} \frac{1}{\gamma_1!} \cdot \frac{1}{\gamma_2!} \sum_{\alpha_1^{(1)}, \ldots \alpha_{\gamma_1}^{(1)}, \alpha_1^{(2)} \ldots \alpha_{\gamma_2}^{(2)}=1}^{s} h^{(1)}_{\alpha_1^{(1)}} \ldots h^{(1)}_{\alpha_1^{(1)}} h^{(2)}_{\alpha_1^{(2)}} \ldots h^{(2)}_{\alpha_{\gamma_2}^{(2)}} \cdot \frac{\partial^{\gamma_1+\gamma_2} F}{\partial h^{(1)}_{\alpha_1^{(1)}} \ldots \partial h^{(1)}_{\alpha_{\gamma_1}^{(1)}} \partial h^{(2)}_{\alpha_1^{(2)}} \ldots \partial h^{(2)}_{\alpha_{\gamma_2}^{(2)}}} = \Delta^{(2)}_{h^{(1)}, h^{(2)}} F(x^{(2)})$$

und:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{x_i^{(1)}=-m_i^{(2)}(h_i^{(1)},\, h_i^{(2)})}^{+M_j^{(2)}(h_i^{(1)},\, h_i^{(2)})} e^{2\pi i \frac{l}{q} \Delta_{h^{(1)} h^{(2)}} F(h^{(2)})} = S(h^{(1)}, h^{(2)}).$$

Also:

$$|S(h^{(1)})|^2 \leqslant \sum_{h_1^{(2)}, \ldots h_s^{(2)}=-m}^{+m} |S(h^{(1)}, h^{(2)})|.$$

So weiter fortfahrend bekommen wir schliesslich:

(3)
$$|S(h^{(1)}, \ldots h^{(\varkappa)})|^2 \leqslant \sum_{h_1^{(\varkappa+1)}, \ldots h_s^{(\varkappa+1)}=-m}^{+m} |S(h^{(1)}, \ldots h^{(\varkappa+1)})|$$

$$|S(h^{(1)} \dots h^{(k-1)})| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{s} \sum_{x_i^{(k-1)} = -m_i^{(k-1)}(h_i^{(1)}, \dots h_i^{(k-1)})}^{+M_i^{(k-1)}(h_i^{(1)}, \dots h_i^{(k-1)})} e^{2\pi i \frac{l}{q} \sum\limits_{\alpha_1, \dots \alpha_{k-1}=1}^{s} h_{\alpha_1}^{(1)} h_{\alpha_2}^{(2)} \dots h_{\alpha_{k-1}}^{(k-1)} \frac{\partial^{(k-1)} F}{\partial x_{\alpha_1}^{(k-1)} \dots \partial x_{\alpha_{k-1}}^{(k-1)}}} \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{s} \sum_{x_i^{(k-1)} = -m_i^{(k-1)}(h_i^{(1)}, \dots h_i^{(k-1)})}^{+M_i^{(k-1)}(h_i^{(1)}, \dots h_i^{(k-1)})} e^{2\pi i \frac{l}{q} \sum\limits_{j=1}^{s} \psi_j x_j^{(k-1)}} \right|,$$

wo:

$$\psi_j = \sum_{\alpha_1, \dots \alpha_{k-1}=1}^{s} h_{\alpha_1}^{(1)} \dots h_{\alpha_{k-1}}^{(k-1)} \frac{\partial^{(k)} F}{\partial x_{\alpha_1}^{(k-1)} \dots \partial x_{\alpha_{k-1}}^{(k-1)} \partial x_j^{(k-1)}} =$$

$$= k! \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}=1}^{s} a_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} j} \, h_{\alpha_1}^{(1)} \dots h_{\alpha_{k-1}}^{(k-1)}.$$

Also wird:

$$|S(h^{(1)}, \dots h^{(k-1)})| = \prod_{j=1}^{s} \left| \sum_{x_j^{(k-1)} = -m_j^{(k-1)}(h_j^{(1)}, \dots h_j^{(k-1)})}^{+M_j^{(k-1)}(h_j^{(1)}, \dots h_j^{(k-1)})} e^{2\pi i \frac{l}{q} \psi_j x_j} \right| \leqslant$$

(4)

$$\leqslant C \prod_{i=1}^{s} \min\left(m, \frac{1}{\left(\frac{l}{q}\psi_j\right)}\right).$$

Hier und weiter werden wir durch $C$ positive Konstanten bezeichnen, die von der Grösse $m$ unabhängig sind. Das Symbol $(z)$ bezeichnet, wie gewöhnlich, die positiv gezählte Entfernung der Zahl $z$ von der nächsten zu $z$ ganzen Zahl.

Damit man die Recursionsformeln (3) als solche benutzen kann, muss man die Schwarzsche Ungleichung gebrauchen:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

$$|S|^{2'} \leqslant \sum_{h_1^{(1)} \dots h_s^{(1)} = -m}^{+m} |S(h^{(1)})|$$

$$|S|^{2^2} \leqslant (2m+1)^s \sum_{h_1^{(1)} \dots h_s^{(1)} = -m}^{+m} |S(h^{(1)})|^2 \leqslant (2m+1)^s \sum_{i=1}^{2} \sum_{h_1^{(i)}, \dots h_s^{(i)} = -m}^{+m} |S(h^{(1)}, h^{(2)})|$$

$$|S|^{2^3} \leqslant [(2m+1)^s]^2 \cdot (2m+1)^{2s} \sum_{i=1}^{2} \sum_{h_1^{(i)}, \dots h_s^{(i)} = -m}^{+m} |S(h^{(1)}, h^{(2)})|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (2m+1)^{s.4} \sum_{i=1}^{3} \sum_{h_1^{(i)}, \dots h_s^{(i)} = -m}^{+m} S(h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)})$$

$$|S|^{2^\sigma} \leqslant (2m+1)^{s.(\sigma-1)} \cdot (2m+1)^{s \cdot 2\lambda_{\sigma-1}} \sum_{i=1}^{\sigma-1} \sum_{h_1^{(i)} \dots h_s^{(i)} = -m}^{+m} |S(h^{(1)}, \dots h^{(\sigma-1)}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (2m+1)^{s \cdot \lambda_\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} \sum_{h_1^{(i)}, \dots h_s^{(i)} = -m}^{+m} S(h^{(1)}, \dots h^{(\sigma)})$$

$$(5) \qquad |S|^{2^{k-1}} \leqslant (2m+1)^{s \cdot \lambda_{k-1}} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{h_1^{(i)}, \ldots h_s^{(i)} = -m}^{+m} |S(h^{(1)}, \ldots h^{(k-1)})|.$$

Die Grösse $\lambda_\sigma$ wird durch die Anfangs und Recursions Bedingungen definiert:

$$\lambda_1 = 0; \; \lambda_2 = 1; \; \lambda_\sigma = 2\lambda_{\sigma-1} + (\sigma - 1)$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass: $\lambda_\sigma = 2^\sigma - (\sigma + 1)$, also für $\sigma = k - 1$, finden wir:

$$\lambda_{k-1} = 2^{k-1} - k$$

Diesen Wert von $\lambda_{k-1}$ in die Abschätzung (4) in (5) hereinsetzend, bekommen wir:

$$(6) \qquad |S|^{2^{k-1}} \leqslant C_m^{s(2^{k-1}-k)} \sum_{i=1}^{s} \sum_{h_i^{(1)}, \ldots h_i^{(k-1)} = -m}^{+m} \prod_{j=1}^{s} \min \left( m, \frac{1}{\left(\frac{l}{q} \psi_j\right)} \right),$$

wo:

$$\psi_j = k! \sum_{i_1, \ldots i_{k-1}=1}^{s} a_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} j} h_{i_1}^{(1)} \ldots h_{i_{k-1}}^{(h)} \quad (j = 1, 2, \ldots s).$$

Die Summe, die in der rechten Seite von (6) steht, bezeichnen wir durch $S_k$. Der Ziel dieser Mitteilung ist für gewisse $q$ die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$(7) \qquad S_k < Cm^{(k-c_k) \cdot s}.$$

wo $c_k$ eine positive nur von $k$ abhängige Konstante ist. Die hier dargelegte Recursionsmethode die uns von Formel (1) zu (6) führt, stammt von H. Weyl.

Im Falle $s = 1$ gibt sie, wie bekannt, fast unmittelbar die Abschätzung von $|S|$ auf Grund des folgenden arithmetischen Satzes: Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x_1 x_2 \ldots x_k = n$ ist bei fixiertem $k$ kleiner als $c_{k,\varepsilon} n^\varepsilon$. Unglücklicherweise ist diese Abschätzung sehr schwach.

Hier wird die Abschätzung, wie höher schon erwähnt war, durch Anwendung von algebraischen und geometrischen Hilfsmitteln gewonnen. Auf diesem komplizierten Weg wird noch etwas (besser zu sagen vieles) von der Schärfe der Abschätzung verloren, die Methode aber gilt für beliebige $s$ und allgemeine Formen $F(x_1, \ldots x_s)$.

H. Mordell hat unlängst eine sehr scharfsinnige Methode erfunden, die das Gaussche Diagonalverfahren auf eine ganz andere Weise benutzt, und damit viel schärfere Abschätzungen leistet. Unglücklicherweise aber habe ich nicht die Möglichkeit gefunden diesen Gedanken für den Fall von stark abgeschnittenen mehrfachen Gausschen Summen zu verwenden.

Die vollständige Lösung des Problems der Abschätzung der Gausschen Summen, das ist das Übereinstimmen (bis auf $m^\varepsilon$ oder $\lg m$ — Faktor) der Lösungen der $\Omega$ und 0-Problemen, ist bis jetzt nur für den Fall $k = 1$ und 2 gelöst.

## § 2. Die Geometriesirung der Fragestellung

Wir müssen die folgende Summe abschätzen:

$$(1) \qquad S_k = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{h_1^{(i)}, \ldots h_s^{(i)} = -m}^{+m} \prod_{j=1}^{s} \min\left(m, \frac{1}{\left(\frac{l}{q}\psi_j\right)}\right).$$

Wir wollen das folgende Ungleichungssystem betrachten:

$$(2) \qquad \begin{gathered} \left| l \sum_{j_1, \ldots j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_1, \ldots j_{k-1}} h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-1}}^{(k-1)} - q y_i \right| \leqslant \bar{p}_i; \ (i = 1, 2, \ldots s); \\ |h_{j_\alpha}^{(\alpha)}| \leqslant m \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots k-1 \\ j_\alpha = 1. 2, \ldots s \end{pmatrix}; \quad \bar{p}_i = \frac{q}{m^{1-\lambda_i}}; \ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1; \ (i = 1, 2, \ldots s). \end{gathered}$$

Die Anzahl der Lösungen dieses Systems bezeichnen wir durch $T(\lambda_1, \ldots \lambda_s)$ oder kürzer durch $T_\lambda$. Wir bezeichnen noch: $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = s\lambda$.

Im folgenden, werden wir statt $(z_1^{(\alpha)}, z_2^{(\alpha)}, \ldots z_s^{(\alpha)})$ verkürzt $(z^{(\alpha)})$ schreiben [z. B. $(h^{(1)})$ statt $(h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, \ldots h_s^{(1)})$]. Der Hauptteil dieser Mitteilung besteht in der Abschätzung der Grösse $T_\lambda$.

Wir fixieren in (2) alle Werte von: $(h^{(1)}) \ldots (h^{(\alpha-1)})(h^{(\alpha+1)}) \ldots (h^{(k-1)})$ und bezeichnen:

$$h_j^{(\alpha)} = x_j;$$

$$l \cdot \sum_{j_1 \ldots j_{\alpha-1} j_{\alpha+1} \ldots j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_1 \ldots j_{\alpha-1} j j_{\alpha+1} \ldots j_{k-1}} h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{\alpha-1}}^{(\alpha-1)} h_{j_{\alpha+1}}^{(\alpha+1)} \ldots h_{j_{k-1}}^{(k-1)} = b_{ij}^{(\alpha)}; \quad (i, j = 1, 2, \ldots s).$$

Dann bekommt das Ungleichungssystem (2) die Gestalt:

$$(2) \qquad |b_{i1}^{(\alpha)} x_1 + b_{i2}^{(\alpha)} x_2 + \ldots + b_{is} x_s - q y_i| \leqslant \bar{p}_i; \ (i = 1, 2, \ldots s); \ |x_j| \leqslant m; \ (j = 1, 2 \ldots s).$$

Im folgenden § beweisen wir, dass diese Ungleichungen in dem $(x, y)$ — Raume einen Parallelotop definieren. Wir bezeichnen diese Figur durch

$$V(\bar{p}_i | h^{(1)}, \ldots h^{(\alpha-1)}, h^{(\alpha+1)}, \ldots h^{(k-1)}).$$

Es ist nötig die Anzahl der ganzen Punkte, die im Parallelotop:

$$(3) \qquad |b_{i1} x_1 + \ldots + b_{is} x_s - q y_i| \leqslant p_i; \ (i = 1, 2 \ldots s); \ |x_j| \leqslant m; \ (j = 1, 2 \ldots s); \ 0 < p_i < q$$

liegen, zu untersuchen. (Wir bezeichnen diesen Parallelotop durch: $V(p/b.)$ Die Untersuchung wird mit Hilfe von geometrischen Methoden geführt. Wir werden, in folgendem, verschiedene Räume betrachten und führen darum verkürzte Bezeichnungen für sie ein.

$$\{(x^{(\alpha_1)}, x^{(\alpha_2)}, \ldots x^{(\alpha_\sigma)})\} = \overline{E}^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\sigma}; \; \overline{E}^{1, 2, \ldots k-1} = \overline{E}'; \; \{(x)\} = \overline{E}$$

$$\{(x^{(\alpha_1)}, x^{(\alpha_2)}, \ldots x^{(\alpha_\sigma)}, y)\} = E^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\sigma}; \; E^{1, 2, \ldots k-1} = E'; \; \{(x), (y)\} = E; \; \{(y)\} = E_0.$$

Die Punkte dieser Räume kann man durch den Buchstaben $M$ bezeichnen, der mit denselben Indices wie der Buchstabe $E$, welcher den Raum selbst bezeichnet, versehen ist. Wenn bei zwei Punkten von $E^{\alpha_1, \ldots \alpha_\sigma}$ und $\overline{E}^{\alpha_1, \ldots \alpha_\sigma}$ die Werte der Koordinaten $(x^{(\alpha_1)}, \ldots x^{(\alpha_\sigma)})$ übereinstimmen, so sagen wir, dass der zweite Punkt eine Spur des ersten ist.

Die Lösungen von (2) werden wir nach gewissen Typen klassifizieren. Die Klassifikationsweise kann verschieden sein. Man kann sie z. B. sowohl eindeutig, wie mehrdeutig wählen, d. h. eine bestimmte Lösung von (2) kann zugleich nur einem oder mehreren Typen zugehören. Die Anzahl der Typen ist endlich; sie hängt nur von $k$, $s$ und einer grossen, aber fixierten, positiven ganzen Zahl $\nu$ ab. (Mit Hilfe dieser Zahl bilden wir die Grösse $m^{\frac{1}{\nu}}$, die wir «die Stufe» nennen werden.) Ein Typus wird durch ein System von $4\pi$ Zahlen:

$$[\sigma_1, \tau_1, \beta_1, \varkappa_1; \ldots; \sigma_\pi, \tau_\pi, \beta_\pi, \varkappa_\pi]; \; (\pi = 1, 2, \ldots k-2)$$

charakterisiert. Die Bestimmung der Zahlen $\sigma_i$, $\tau_i$, $\beta_i$, $\varkappa_i$ für einen gegebenen Punkt aus $E'$ der (2) genügt, wird im § 8 auseinandergesetzt.

## § 3. Der Parallelotop $V(p/b)$

Wir zeigen in diesem §, dass das System (3) wirklich einen Parallelotop im Raume $E$ definiert. Wir bezeichnen als die Axe $A$ von $V(p/b)$ die Figur, welche durch die Bedingungen:

$$(1) \quad \begin{gathered} b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \ldots + b_{is} x_s - q y_i = 0; \; (i = 1, 2, \ldots s); \\ |x_j| \leqslant m; \; (j = 1, 2, \ldots s) \end{gathered}$$

gegeben ist. $A$ dient nicht nur als Axe von $V(p/b)$, sondern, nach einer gehörigen Verschiebung bildet $A$ auch eine Facete von $V(p/b)$. Weil das Gleichungssystem den Rang $s$ besitzt, so ist $A$ ein $s$-dimensionaler Paralellotop, dessen $s$-Kanten auch (nach einer Verschiebung) Kanten von $V(p/b)$ sind.

Wir benutzen noch einen $s$-dimensionalen Paralellotop $S$, den wir als «Hauptschneidung» von $V$ bezeichnen und der durch die Bedingungen definiert ist:

$$(2) \quad x_1 = 0; \; x_2 = 0; \ldots x_s = 0; \; |q y_1| \leqslant p_1; \; |q y_2| \leqslant p_2 \ldots |q y_s| \leqslant p_s.$$

$S$ kann auch durch eine Verschiebung in eine Facete von $V$ verwandelt werden. $A$ und $S$ haben keine gemeine Kanten und darum alle ihre $2s$ Grundkanten bilden die Gesamtheit aller Grundkanten von $V(p/b)$.

Wir finden alle Scheitel der Axe $A$ aus den Gleichungen:

$$(3)\ l\cdot\sum_{j=1}^{s} b_{1j}x_j^{(\sigma)}=qy_1^{(\sigma)};\ \dots\ l\sum_{j=1}^{s} b_{sj}x_j^{(\sigma)}=qy_s^{(\sigma)};\ x_1^{(\sigma)}=\varepsilon_1^{(\sigma)}\cdot m\dots x_s^{(\sigma)}=\varepsilon_s^{(\sigma)}\cdot m.$$

Da ist $\sigma$ die Nummer des Scheitels und $(x^{(\sigma)},\ y^{(\sigma)})$ seine Koordinaten. Das Zahlensystem $(\varepsilon^{(\sigma)})$ besteht aus den Zahlen $\pm 1$. Die Anzahl der verschiedenen Nummern $\sigma$ ist gleich der Anzahl verschiedener Wertsysteme $(\varepsilon)$, also ist gleich $2^s$, also: $\sigma=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ 2^s-1$.

Die Axe $A$ projektiert sich auf $\bar{E}$ in einen Würfel X, der durch die Bedingungen

$$|x_j|\leqslant m;\ (j=1,\ 2,\ \dots\ s)$$

in $\bar{E}$ definiert ist. Die Kanten von $A$ projektieren sich in die Kanten des Würfels. Diese Kanten von $X$ kann man folgendermassen bekommen: wir nehmen $(s+1)$ Scheitel von $X$, dessen $(\varepsilon^{(\sigma)})$ wie folgt definiert sind:

$$\varepsilon_k^{(0)}=-1;\ (k=1,\ 2,\ \dots\ s);\ \ \varepsilon_k^{(\varkappa)}=-1+2\delta_k^{\varkappa};\ \ (k,\ \varkappa=1,\ 2,\ \dots\ s).$$

($\delta_k^{\varkappa}$ — ist das Kroneckersche Symbol). Diese Werte von $\varepsilon_k^{(\varkappa)}$ in die Formeln für die Scheitel von $A$ hereinsetzend, bekommen wir die Ausdrücke der Kanten von $A$, durch ihre Projektionen $(\xi^{(\sigma)},\ \eta^{(\sigma)})$, wo die $\varkappa$-te Kante verbindet den $\varkappa$-ten Scheitel mit dem Nullten:

$$\xi_k^{(\varkappa)}=2\delta_k^{\varkappa}m;\ \ \eta_k^{(\varkappa)}=2\,\frac{l}{q}\,m\cdot b_{k\varkappa};\ (k,\varkappa=1,\ 2\dots s).$$

Die Matrix aller $2s$ Kanten von $V(p/b)$ bekommt die Gestalt:

$$(4)\qquad \Delta(V)=\left\|\begin{matrix} 2m & 0\dots 0 & 0 & 0 & \dots\dots 0\\ 0 & 2m\dots 0 & 0 & 0 & \dots\dots 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0\dots 2m & 0 & 0 & \dots\dots 0\\ 2\frac{l}{q}mb_{11} & 2\frac{l}{q}mb_{12}\dots 2\frac{l}{q}mb_{1s} & 2\frac{p_1}{q} & 0 & \dots\dots 0\\ 2\frac{l}{q}mb_{21} & 2\frac{l}{q}mb_{22}\dots 2\frac{l}{q}mb_{2s} & 0 & 2\frac{p_2}{q} & \dots\ 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 2\frac{l}{q}mb_{s1} & 2\frac{l}{q}mb_{s2}\dots 2\frac{l}{q}mb_{ss} & 0 & 0 & \dots\dots 2\frac{p_s}{q} \end{matrix}\right\|$$

Von da folgt, dass $V(p/b)$ ein nicht degenerierender Parallelotop ist, weil sein Inhalt gleich:

$$V = D(\Delta(V)) = 2^{2s} m^s \frac{p_1 p_2 \dots p_s}{q^s} \tag{5}$$

ist.

## § 4. Das Gitter der ganzen Punkte in $V(p/b)$

Wir wollen die Gesamtheit der ganzen Punkte, die in $V(p/b)$ liegen, betrachten. Das Lineal, das auf ihnen gebaut ist, bezeichnen wir durch $L_\sigma$, wenn $\sigma$ seine Dimensionszahl ist.

Den Teil von $L_\sigma$, der in $V(p/b)$ enthalten ist, bezeichnen wir durch $\overline{L}_\sigma$. Soll die Projektion von $L_\sigma$ auf $X$ genau $\tau$ linear-unabhängige Vektoren enthalten. Wir bezeichnen diese Projektion durch $M_\tau$. $L_\sigma$ enthält also genau $\sigma - \tau$ linear-unabhängige Vektoren, die zu X ortogonal sind. Das Lineal, das auf diesen Vektoren gebaut ist, bezeichne ich durch $N_{\sigma-\tau}$. (Ein solches $L_\sigma$ bezeichnen wir weiter durch $L_{\sigma,\tau}$). $N_{\sigma-\tau}$ ist zu $\overline{E}$ ortogonal und also zu $E_o$ parallel.

Nun ziehen wir ins Auge Koordinatenlineale, die auf $\tau$ $x$-Axen gebaut sind. Solche Lineale bezeichnen wir $X_\tau$. Ganz analog definieren wir $Y_{\sigma-\tau}$. Jeder $\tau$-dimensionaler Parallelotop $P_\tau$ in $L_{\sigma,\tau}$, der keinen, zu $N_{\sigma-\tau}$ parallelen Vektor enthält, projektiert sich in $M_\tau$ in einen nicht degenerierenden $\tau$-Parallelotop.

Nach dem verallgemeinerten Pithagorschen Satz[1] ist das Quadrat des $\tau$-Inhalts eines beliebigen $\tau$-Parallelotops $Q_\tau$ in $X$ gleich der Summe der Quadrate der $\tau$-Inhalte aller Projektionen von $Q_\tau$ auf die $X_\tau$. Es gibt also unter den $X_\tau$ ein solches Lineal, wir bezeichnen es durch $X_\tau'$, dass die Projektion von $P_\tau$ auf $X_\tau'$ nicht degeneriert. Wir bezeichnen diese Projektion durch $R_\tau$.

Jeder $(\sigma - \tau)$-Parallelotop $P'_{\sigma-\tau}$ aus $N_{\sigma-\tau}$ ist zu $E$ parallel und projektiert sich deshalb auf $E_0$ in einen Parallelotop $Q'_{\sigma-\tau}$, der $P'_{\sigma-\tau}$ gleich ist. Aus dem Pithagorschen Theorem folgt wieder, dass es ein solches Koordinatenlineal $Y'_{\sigma-\tau}$ gibt, dass die Projektion von $Q'_{\sigma-\tau}$ oder $P'_{\sigma-\tau}$ auf $Y'_{\sigma-\tau}$ ein nicht degenerierender Parallelotop $R'_{\sigma-\tau}$ ist.

Wir bilden auf $X_\tau'$ und $Y'_{\sigma-\tau}$ ein $\sigma$-dimensionales Koordinatenlineal und bezeichnen es $Z_{\sigma,\tau}$.

[1] Der Inhalt $V_k$ des $k$-dimensionalen Parallelotops, der auf den $k$ Vektoren:

$$(a_{1i}, a_{2i}, \dots a_{si}) \ (i = 1, 2, \dots k)$$

gebaut ist, wird durch die Formel ausgedrükt:

$$V_k^2 = \sum \begin{Vmatrix} a_{i_1 1}, a_{i_1 2} \dots a_{i_1 k} \\ a_{i_2 1}, a_{i_2 2} \dots a_{i_2 k} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i_k 1}, a_{i_k 2} \dots a_{i_k k} \end{Vmatrix}^2$$

wo die Summierung über alle Kombinationen $(i_1, i_2 \dots i_k)$ aus Zahlen $(1, 2, \dots n)$ ausgeführt wird.

Wir konstruieren in $L_{\sigma,\tau}$ auf $P_\tau$ und $P'_{\sigma-\tau}$ einen neuen Parallelotop $K_\sigma$ und projektieren ihn auf $Z_{\sigma,\tau}$. Diese Projektion wird durch $F_\sigma$ bezeichnet. Es ist zu bemerken, dass $R'_{\sigma-\tau}$ eine Facete von $F_\sigma$ ist. Wirklich, die Projektion eines Vektors $\bar{a}$ auf ein Koordinatenlineal $Z$ ist ein neuer Vektor $\bar{a}'$, den man folgendermassen bekommen kann; man ersetzt in $\bar{a}=(a_1, a_2, \ldots a_n)$ durch Null die Projektionen auf die Axen, welche im Koordinatenlineal $Z$ fehlen. Weil bei allen Vektoren aus $P'_{\sigma-\tau}$ ihre Projektionen auf die $x$-Axen gleich Null sind, so fällt die Projektion von $P'_{\sigma-\tau}$ auf $Z_{\sigma,\tau}$ mit der Projektion auf $Y'_{\sigma-\tau}$, also mit $R'_{\sigma,\tau}$, zusammen. Wir schliessen daher mit Hilfe der Formel $V=Sh$ für den Inhalt des Parallelotops,[1] dass: $F_\sigma=R_\tau\cdot R'_{\sigma-\tau}$ ist. Weil $R_\tau$, sowie $R'_{\sigma-\tau}$ von Null verschieden sind, so ist auch $F_\sigma$ von Null verschieden. Die Figuren aus $L_{\sigma,\tau}$ projektieren sich also auf $Z_{\sigma,\tau}$ ohne zu degenerieren, und man kann deshalb viele Eigenschaften von $L_{\sigma,\tau}$ mit Hilfe seiner Projektion auf $Z_{\sigma,\tau}$ untersuchen. Die Projektion eines geometrischen Gebildes H auf ein Lineal $Z$ bezeichnen wir durch: $H(Z)$. Wir wollen nun obere Grenzen für die Projektionen $\bar{L}_{\sigma,\tau}(Z_{\sigma,\tau})$ und $\bar{L}_{\sigma,\tau}(X_\tau')$ finden.

$$\bar{L}_{\sigma,\tau}(X_\tau') \leqslant Cm^\tau \tag{1}$$

weil diese Projektion nur ein Teil eines Würfels ist, dessen Kante der Grösse $2m$ gleich ist.

Jeder Punkt aus $\bar{L}_{\sigma,\tau}(X'_\tau)$ ist die Projektion auf $X'_\tau$ einer $(\sigma-\tau)$-dimensionaler Schneidung von $\bar{L}_{\sigma,\tau}(Z_{\sigma,\tau})$, die zu $Y'_{\sigma-\tau}$ parallel ist. Diese Schneidung ist die Projektion auf $Y'_{\sigma-\tau}$ des $(\sigma-\tau)$-dimensionalen Polyeder $P''_{\sigma-\tau}$, welcher als Schneidung von $\bar{L}_{\sigma,\tau}$ mit $Y_c$ dient, wo $Y_c$ durch die Gleichungen:

$$x_1=c_1;\ x_2=c_2;\ \ldots\ldots;\ x_s=c_s$$

definiert ist. $P''_{\sigma-\tau}$ liegt in der Schneidung von $Y_c$ mit $V$, diese Schneidungen aber sind alle einander gleich, sobald alle $|c_i|\leqslant m\,(i=1, 2, \ldots s)$ sind. Wir wählen, der Einfachkeit halber, $c_1=c_2=\ldots=c_s=0$, das ist $Y_c=E_0$. Dann liegt $P''_{\sigma-\tau}$ in einem $s$-dimensionalen Parallelotop $S$ (die Hauptschneidung), der durch die folgenden Bedingungen definiert ist:

$$x_1=0;\ \ldots\ x_s=0;\ |y_1|\leqslant\frac{p_1}{q};\ \ldots|y_s|\leqslant\frac{p_s}{q}.$$

[1] Für den Inhalt eines Parallelotops wird gewöhlich die Formel: $V=Sh$ gebraucht, wo $S$ eine Seitenfläche also eine $(n-1)$-dimensionale Facete und $h$ die Höhe, das ist die Entfernung zwischen $S$ und der zu $S$ parallelen Seitenfläche des Parallelotops, bezeichnet. Diese Formel gilt auch in einer allgemeineren Fassung: $V_n=S_k\cdot h_{n-k}$. Da ist $S_k$ der Inhalt einer beliebigen $k$-dimensionalen Facete; $h_{n-k}$ ist der Inhalt des $(n-k)$-dimensionalen Parallelotops, in den sich $V_n$ auf $L_{n-k}$ projektiert, wo $L_{n-k}$ das zu $S_k$ komplementäre Lineal ist.

Die Projektion von $P''_{\sigma-\tau}$ auf $Y'_{\sigma-\tau}$ übersteigt nicht die grösste $(\sigma-\tau)$-dimensionale Facete der Hauptschneidung $S$. Wenn die Numeration so gewählt wird, dass: $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_s$ sind, so ist unsere Projektion nicht grösser als: $\frac{p_1 p_2 \cdots p_{\sigma-\tau}}{q^{\sigma-\tau}}$. Wir bekommen damit mit Hilfe der Formel $V_n = S_k \cdot h_{n-k}$ die Abschätzung

$$\overline{L}_{\sigma,\tau}(Z_{\sigma,\tau}) \leqslant Cm^{\tau} \cdot \frac{p_1 p_2 \cdots p_{\sigma-\tau}}{q^{\sigma-\tau}}. \tag{2}$$

## § 5. Über die Anzahl der Gitterpunkte in einem konvexen Körper

Die ganzen Punkte, die in $L_{\sigma,\tau}$ liegen, bilden ein $\sigma$-dimensionales Gitter, welches wir durch $G_{\sigma,\tau}$ bezeichnen. Der Teil von $G_{\sigma,\tau}$, der in $\overline{L}_{\sigma,\tau}$ enthalten ist, sei $\overline{G}_{\sigma,\tau}$. Die zwei Gitter $G_{\sigma,\tau}$ und $G_{\sigma,\tau}(Z_{\sigma,\tau})$ sind zu einander isomorph als Abelsche Gruppen der Vektoren-Addition aufgefasst, wenn man jedem Punkt von $G_{\sigma,\tau}$ seine Projektion in $G_{\sigma,\tau}(Z_{\sigma,\tau})$ zuordnet. Die Anzahl der Punkte in $G_{\sigma,\tau}(Z_{\sigma,\tau})$ kann mit Hilfe des folgenden Lemmas I von oben abgeschätzt werden.

Lemma I. Sei in einem $k$-dimensionalen Raume $(k \geqslant 1)$ $V$ ein $k$-dimensionaler konvexer Körper mit einem Symmetriezentrum, das in einem Punkte eines $k$-dimensionalen Gitters liegt. Sei $\delta$ der Inhalt des Grundparallelotops des Gitters und sei die Gesamtheit der Gitterpunkte, die in $V$ liegen, $k$-dimensional. Dann wird die Anzahl $N$ der Gitterpunkte in $V$ kleiner als

$$N \leqslant C_k' \frac{V}{\delta} \tag{1}$$

wo $C_k'$ eine, nur von $k$ abhängige, Konstante ist.

Beweis: Auf einer Geraden, wenn also $k=1$ ist, wird die Behauptung des Lemmas evident und $C_1' = 2$. Wir setzen voraus, dass unser Lemma für $k = 1, 2, \ldots n-1$ richtig ist. Wir beweisen dann, dass unser Lemma auch für $k = n$ gilt.

Wir wählen in $V$ $n$ Gitterpunkte, die mit dem Anfangspunkt eine Menge bilden, die nicht in einem $(n-1)$-Lineale liegen kann. Das, auf diesen Punkten gebaute Simplex $S_0$ liegt völlig in $V$, wegen der Konvexität des Körpers. Wären in $S_0$ ausser seiner Scheitel noch andere Gitterpunkte, so könnten wir einen Scheitelpunkt von $S_0$ durch einen dieser Gitterpunkte ersetzen und damit einen Simplex $S_1'$ bekommen, der weniger Gitterpunkte als $S_0$ besitzt. So weiter fortfahrend gelingen wir zum Simplex $S$, der: 1) völlig in $V$ liegt, 2) alle Scheitelpunkte von $S$ sind Gitterpunkte, 3) $S$ enthält keine anderen Gitterpunkte.

Es ist leicht durch Induktion den follgenden Satz über Gitterparallelotope zu beweisen (Unter einem Gitterparallelotop wird ein Parallelotop gemeint, dessen alle Scheitel in Gitterpunkten liegen). In jedem Gitterparallelotop,

kann man stets zu jedem seiner Scheitelpunkte noch $n$ Gitterpunkte so wählen, dass das auf diesen $(n+1)$ Punkten gebaute Parallelotop ein Grundparallelotop des Gitters ist.

Wir bauen auf $n$ aus $O$ herausgehenden Kanten von $S$ einen Parallelotop $P$. Er liegt ganz im Simplex $S'$, der aus $S$ folgendermassen entsteht. Sei $F$ die Seite von $S$, die $O$ nicht enthält. Wir verschieben das Lineal der Seite $F$ durch eine Parallelverschiebung, bis seine Entfernung von $O$ $n$-mal grösser als die ursprüngliche wird. Alle anderen Seiten von $S$ setzen wir fort, bis sie das entfernte Lineal wieder treffen. Mit $P$ enthält $S'$ auch die $n$ Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$, die in $P$ liegen und auf denen und $O$ man einen Grundparallelotop $Q$ unseres Gitters bauen kann. $Q$ liegt also im Simplex $S''$, der aus $S'$ auf dieselbe Weise, wie $S'$ aus $S$ entsteht. $S''$ kann auch unmittelbar aus $S$ abgeleitet werden durch eine $n^2$-fache Entfernung der $F$-Seite.

Zu jedem Gitterpunkte in $V$ bauen wir den Grundparallelotop an. Sie können keine gemeinen inneren Punkte haben und liegen ganz im Körper $V'$, der aus $V$ durch eine $2n^2$-fache Gomotetievergrösserung mit dem $O$-Punkt als Zentrum vorkommt. Wir bekommen also die Abschätzung:

$$N\delta \leqslant (2n^2)^n \cdot V, \text{ oder } N \leqslant C_n' \cdot \frac{V}{\delta}, \text{ wo } C_n' = (2n^2)^n, \text{ w. z. b. w.}$$

In Formel (1) setzen wir den Wert von $V$ aus (2) § 4 herein. Weil $Z_{\sigma,\tau}$ ein Koordinatenlineal ist, so kann der Inhalt $\delta$ des Grundparallelotops des Gitters $G_{\sigma,\tau}(Z_{\sigma,\tau})$ nicht kleiner als die Einheit sein. Wir bekommen damit die Abschätzung der Anzahl $N$ der Punkte von $\overline{G}_{\sigma,\tau}(Z_{\sigma,\tau})$:

$$N \leqslant Cm^{\tau} \frac{p_1 p_2 \cdots p_{\sigma-\tau}}{q^{\sigma-\tau}}. \tag{2}$$

Lemma I gibt für die Anzahl eine Abschätzung von oben. Man kann eine Abschätzung für diese Zahl aufstellen, die stets gilt, ohne einschränkende Voraussetzungen über die Dimension des Lineals, das auf in $V$ liegenden Gitterpunkten gebaut ist, zu machen.

L e m m a II. Sei $V$ ein konvexer $n$-dimensionaler Körper in einem $n$-dimensionalen Raume. $V$ besitzt ein Symmetriezentrum, das ein Gitterpunkt ist. Der Inhalt des Grundparallelotops von $G$ sei $\delta$. Die Anzahl $N$ der Gitterpunkte in $V$ ist von unten abgegrenzt:

$$N \geqslant \frac{1}{C_n''} \frac{V}{\delta}, \tag{3}$$

wo $C_n''$ nur von der Dimensionszahl $n$ abhängt.

Beweis. Sei $l$ eine solche durch $O$ gehende Gerade, dass auf keiner anderen durch $O$ gehenden Geraden mehr, als auf $l$, Gitterpunkte in $V$ sitzen. Die Anzahl

dieser Punkte sei $\nu$. Die Entfernung zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten auf $l$ sei $a$. Wir legen durch $O$ ein $(n-1)$—Lineal $P$, das zu $l$ ortogonal ist. Das Büschel der zu $l$ parallelen Geraden des Gitters schneidet $P$ in Punkten, die ein $(n-1)$—dimensionales Gitter $G_1$ bilden, dessen Zelle von Inhalt $\delta' = \frac{\delta}{a}$ ist.

Die parallel zu $l$ ausgeführte Projektion von $V$ auf $P$ bezeichnen wir durch $V^{(1)}$. Die Grenze $\Gamma^{(1)}$ dieser Projektion ist die Projektion einer Punktmannigfaltigkeit $\Gamma$ auf der Oberfläche von $V$, die $(n-2)$ oder $(n-1)$ als Dimensionszahl besitze. Wir werden $V^{(1)}$ homotetisch zu $O$ stetig zusammenziehen und fixieren die folgenden Homotetiekoeffiziente:

$$\rho_1 = \frac{\nu-1}{\nu-1} = 1; \quad \rho_2 = \frac{\nu-2}{\nu-1} = 1 - \frac{1}{\nu-1}; \cdots \quad \rho_k = \frac{\nu-k}{\nu-1} = 1 - \frac{k-1}{\nu-1}; \cdots$$

$$\rho_{\nu-1} = \frac{1}{\nu-1} = 1 - \frac{\nu-2}{\nu-1}; \quad \rho_\nu = \frac{O}{\nu-1} = O.$$

Die entsprechenden Figuren auf $P$ bezeichnen wir durch $V^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots \nu)$ und ihre Grenzen durch $\Gamma^{(k)}$. Wir wollen für $V^{(k)}$ eine Abschätzung von unten aufstellen. $V$ selbst ist nicht grösser als ein Zylinder, der auf $V^{(1)}$ als Basis mit $AB$ als Erzeugende gebaut ist, wo $AB$ die in $V$ liegende Strecke von $l$ ist. (In einem konvexen Körper mit einem Symmetriezentrum enthält der Büschel von parallelen Sehnen, wie bekannt, keine Sehne, die länger als die durch das Zentrum gelegene ist.) Die Länge von $AB$ ist $(\nu + \varepsilon)a$, wo $|\varepsilon| \leqslant 1$ ist. Infolgedessen ist:

$$V \leqslant V^{(1)}(\nu + \varepsilon)a; \quad V^{(1)} \geqslant \frac{V}{(\nu+\varepsilon)a}; \quad V^{(k)} = V^{(1)}\left(\frac{\nu-k}{\nu-1}\right)^{n-1};$$

also:

$$V^{(k)} \geqslant \frac{V}{(\nu+\varepsilon)a} \cdot \left(\frac{\nu-k}{\nu-1}\right)^{n-1}.$$

Wir wollen unser Lemma durch vollständige Induktion beweisen, setzen also voraus, dass für Fälle von $k$-Dimensionen $(k = 1, 2, \ldots n-1)$ unser Satz gilt. (Für den Fall $k = 1$ ist es evident.) Dann können wir die Ungleichung (3) zur Abschätzung von unten der Anzahl $n^{(k)}$, der in $V^{(k)}$ liegenden Punkten des Gitters $G_1$, anwenden:

$$n^{(k)} \geqslant \frac{1}{C''_{n-1}} \frac{V^{(k)}}{\delta'} \geqslant \frac{1}{C''_{n-1}} \frac{V}{(\nu+\varepsilon)a\delta'} \cdot \left(\frac{\nu-k}{\nu-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{C''_{n-1}} \frac{V}{(\nu+\varepsilon)\delta} \cdot \left(\frac{\nu-k}{\nu-1}\right)^{n-1}.$$

Sei $W^{(k)}$ die zwischen $\Gamma^{(k)}$ und $\Gamma^{(k+1)}$ enthaltene Schale, die Punkte von $\Gamma^{(k)}$ mitgezählt und die Punkte von $\Gamma^{(k+1)}$ ausgeschlossen, und die Anzahl der Gitter-

punkte von $G_1$, in $W^{(k)}$ durch $m^{(k)}$. $W^{(\nu)}$ sei der Punkt 0. Die folgende Beziehung ist evident:

$$n^{(k)} = m^{(k)} + m^{(k+1)} + \ldots + m^{(\nu)}.$$

Sei $M^{(k)}$ ein Gitterpunkt aus $G_1$, der in $W^{(k)}$ liegt. Er liegt auf einer zu $l$ parallelen Gerade L des Gitters $G$. Wir ziehen durch $l$ und $L$ eine Ebene $Q$ (2 — Lineal). Diese Ebene projektiert sich auf $P$ in eine Gerade $q$, die durch $O$ und $M^{(k)}$ geht. Diese Gerade schneidet in einem Punkte $D$ die Grenze $\Gamma^{(1)}$ von $V^{(1)}$. $D$ ist die Projektion von $F$, wo $F$ ein Punkt oder eine zu $l$ parallele Gerade, in der $\Gamma$ durch die Ebene $Q$ geschnitten wird. Wir wählen auf $F$ einen beliebigen Punkt N (wenn $F$ ein Punkt ist, so fallen $F$ und $N$ zusammen). In der Ebene von $l$ und $L$ liegt das Dreieck $ABN$, das auf der Zeichnung (Fig. 1) dargestellt ist. $R$ und $S$ sind die Schnittpunkte von $L$ mit $AN$ und $BN$. Sei $OD = \lambda$. Der Punkt $M^{(k)}$ liegt zwischen J und $K$, die, wie folgt, gewählt sind.

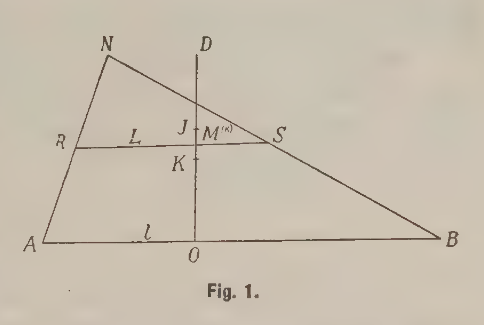


Fig. 1.

$$OK = \lambda \cdot \frac{\nu - k - 1}{\nu - 1}; \quad OI = \lambda \cdot \frac{\nu - k}{\nu - 1};$$

also ist:

$$DM^{(k)} > DJ > \lambda \frac{k-1}{\nu - 1},$$

und also:

$$RS = AB \cdot \frac{DM^{(k)}}{DC} > (\nu + \varepsilon)\, a \cdot \frac{\lambda \cdot \frac{k-1}{\nu-1}}{\lambda} = a(k-1)\frac{\nu + \varepsilon}{\nu - 1} \geqslant a(k-1).$$

Demzufolge liegt auf jeder Geraden, die durch einen der Punkte $M^{(k)}$ geht, nicht weniger als $(k-1)$ — Punkte des Gitters $G$. Die Anzahl $N$ ist also nicht kleiner als:

$$N \geqslant m^{(1)} \cdot 0 + m^{(2)} \cdot 1 + m^{(3)} \cdot 2 + \ldots + m^{(k)} \cdot (k-1) + \ldots +$$
$$+ m^{\nu-1}(\nu - 2) + m^{\nu} \cdot \nu = n^{(1)} \cdot 0 + n^{(2)} \cdot 1 + n^{(3)} \cdot 1 + \ldots +$$
$$+ n^{(\nu-1)} \cdot 1 + 2 \geqslant \frac{1}{C_{n-1}} \cdot \frac{V}{\delta} \cdot \frac{1}{\nu + \varepsilon} \cdot \sum_{k=1}^{\nu-1} \left(\frac{\nu - k}{\nu - 1}\right)^{n-1} + 2$$

$$\sum_{k=1}^{\nu-1} \left(\frac{\nu - k}{\nu - 1}\right)^{n-1} = \frac{1}{(\nu-1)^{n-1}} \sum_{k=1}^{\nu-1} (\nu - k)^{n-1} \geqslant \frac{1}{(\nu-1)^{n-1}} \int_1^{\nu} (\nu - k)^{n-1}\, dk =$$

$$= \frac{1}{(\nu-1)^{n-1}} \int_0^{\nu-1} z^{n-1}\, dz = \frac{(\nu-1)^n}{n(\nu-1)^{n-1}} = \frac{\nu - 1}{n}.$$

Also:

$$N > \frac{1}{C''_{n-1}} \frac{V}{\delta} \frac{1}{\nu + \varepsilon} \frac{\nu - 1}{n} + 2 \geqslant \frac{1}{2n\, C''_{n-1}} \cdot \frac{V}{\delta},$$

wenn $\nu \geqslant 3$, weil:

$$\frac{\nu - 1}{\nu + \varepsilon} > \frac{\nu - 1}{\nu + 1} \geqslant \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$C''_n = 2n \cdot C''_{n-1}$ setzend, finden wir für $C''_n$ den Wert: $C''_n = 2^n \cdot n!$

Wenn $\nu < 3$ ist, so ist, der Symmetrie des Körpers $V$ wegen, $\nu = 1$, und also $V$ ist lehr ausser des Zentrums, also $N = 1$ und nach dem Minkowskischen Satze ist $V$ kleiner als $2^n \cdot \delta$. Dann werden unser Lemma und der für $C''_n$ gefundene Wert, leicht verifiziert:

$$N = 1 \geqslant \frac{1}{C_n''} \cdot \frac{V}{\delta} = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{2^n \delta}{\delta} = \frac{1}{n!}.$$

Lemma II ist eine natürliche und für die asymptotische Zahlentheorie nicht interessenlose Verallgemeinerung des Minkowskischen Satzes. Der genaue Wert der Konstante $C_n''$ ist, vermutlich, die Minkowskische Konstante $2^n$. Ich habe aber diese Vermutung nicht bewiesen.

Aus diesen zwei Lemmas folgt unmittelbar:

L e m m a III. Wenn man über $V$ ($V$ ist, wie in den vorhergehenden Lemmas I und II definiert) eine $\mu$-fache homotetische Vergrösserung ausführt, so wird die Anzahl $N'$ des Punktgitters im neuen Körper $V'$ kleiner, als:

$$N' \leqslant C_n''' \mu^n \cdot N \qquad (\mu \geqslant 1) \tag{4}$$

wo $N$ die Anzahl der Punktgitter in $V$, und $C_n''' = C_n' \cdot C_n''$ ist.

Beweis: Sei die Dimension der in $V'$ enthaltenen Gitterpunkte gleich $n$. Dann ist nach Lemma I

$$N' \leqslant C_n' \cdot \frac{V'}{\delta} = C_n' \cdot \mu^n \cdot \frac{V}{\delta}$$

wo $\delta$, wie höher, den Inhalt des Grundparallelotops bezeichnet. Nach Lemma II aber ist:

$$N > \frac{1}{C_n''} \frac{V}{\delta}.$$

Also gilt die Ungleichung (4). Wäre die Dimension des Lineals $L_k$, das auf den in $V'$ liegenden Gitterpunkten gebaut ist, gleich $k$ (wo $k < n$ ist), so würden wir unser Lemma auf den $k$-dimensionalen Raum $L_k$ anwenden, was uns geben würde:

$$N' \leqslant C_k' \mu^k \cdot \frac{V}{\delta}; \quad N > \frac{1}{C_k''} \cdot \frac{V}{\delta}; \quad N' \leqslant C_k' \cdot C_k'' \mu^k \frac{V}{\delta} < C_n''' \mu^n \frac{V}{\delta}.$$

### § 6. Die Abschätzung der Anzahl von Gitterpunkten in $V$ (nach vier Methoden).

Wir konstruieren, wie folgt, den Begriff des Kernes von $k$-ter Ordnung des Körpers $\bar{L}_{\sigma,\tau}$. Wir drücken zusammen $\bar{L}_{\sigma,\tau}$ zu seinem Zentrum. Sei $\rho$ das Verhältnis einer beliebigen Strecke in $\bar{L}_{\sigma,\tau}$ zu der entsprechenden Strecke in dem zusammengezogenen Körper, den wir durch $W(\rho)$ bezeichnen (für $\rho=1$, schreiben wir $W(1)=W$). Die Anzahl der Gitterpunkte in $W(\rho)$, die auf der Grenzfläche liegenden Punkte mitgezählt, bezeichnen wir durch $n(\rho)$. Sei $\rho_l$ der grösste Wert von $\rho$, für den die Gesamtheit von den in $W(\rho)$ liegenden Punkten des Gitters $G_{\sigma,\tau}$ ein $l$-dimensionales Lineal definiert. Die Punkte des Gitters $G_{\sigma,\tau}$ in $W(\rho_l+\varepsilon)$ definieren, folglich, ein nur $(l-1)$—dimensionales Lineal. Die Körper $W(\rho_l)$ $(l=0, 1, 2, \ldots \sigma)$ werden wir als Kerne $l$-ter Ordnung von $L_{\sigma,\tau}$ nennen.

Es stellt keine Schwierigkeiten vor, $\rho_k$ von unten abzuschätzen. Nach Lemma II § 5 ist:

$$W(\rho_k) \leqslant Cn(\rho_k)\delta;$$

also:

$$\frac{W}{W(\rho_k)} \geqslant \frac{1}{C}\frac{W}{n(\rho_k)\delta};$$

aber:

$$W = W(\rho_k)\rho_k^{\sigma}.$$

Demzufolge ist:

$$\rho_k = \sqrt[\sigma]{\frac{W}{W(\rho_k)}} \geqslant \frac{1}{C}\left[\frac{W}{\delta}\cdot\frac{1}{n(\rho_k)}\right]^{\frac{1}{\sigma}}. \tag{1}$$

Die Grösse $n(\rho_k)$ kann man von oben abschätzen Das Lineal $L_k$, das au allen in $W(\rho_k)$ Gitterpunkten gebaut ist, und seine Projektion auf $Z_{\sigma,\tau}$, die wir durch $L_k'$ bezeichnen, enthalten das erste ein Punktgitter $H_k$, das aus Punkten von $G_{\sigma,\tau}$ besteht, und die zweite die Projektion $H_k'$ von $H_k$ auf $Z_{\sigma,\tau}$.

Die Gitter $H_k$ und $H_k'$, als Abelsche Gruppen in Bezug auf die Vektoraddition aufgefasst, sind isomorph, indem wir einem Punkte aus $H_k$ seine Projektion in $H_k'$ zuschreiben. Das Lineal $L_k$ enthält eine gewisse Anzahl (wir bezeichnen sie durch $k-\tau_1$) von linear-unabhängigen, zu $Y'_{\sigma-\tau}$ parallelen Vektoren und noch $\tau_1$ $(\tau_1 \leqslant \tau)$ Vektoren, die mit den ersten $k-\tau_1$ Vektoren ein vollständiges System von $k$ linear-unabhängigen Vektoren in $L_k$ bilden. Wir projektieren auf $L_k'$ die Schneidung von $W(\rho_k)$ mit $L_k$ und bezeichnen diese Projektion durch $\omega_k'$. Diese Projektion ist dem Inhalte nach genau $\rho_k^{\,k}$-mal kleiner, als die Projektion auf $L_k'$ der Schneidung von $L_k$ mit $W$, diese letzte aber, wie im § 4 gefunden war, übersteigt die Grösse:

$$Cm^{\tau_1}\frac{p_1\cdots p_{k-\tau_1}}{q^{k-\tau_1}}$$

nicht. Folglich ist:

$$\omega_k' \leqslant C \frac{m^{\tau_1}}{\rho_k^k} \cdot \frac{p_1 \ldots p_{k-\tau_1}}{q^{k-\tau_1}} \leqslant C \frac{m^k}{\rho_k^k},$$

wenn $k \leqslant \tau$ ist.

Nach Lemma I § 5 übersteigt die Anzahl der Punkte in $\omega_k'$ die Grösse $C \frac{\omega_k'}{\Delta_k}$ nicht. Da ist $\Delta_k$ der Inhalt des Grundparallelotops des Gitters, $H_k'$. Infolge der Ungleichnug $\Delta_k \geqslant 1$, bekommen wir für $n(\rho_k)$ eine Abschätzung von oben:

$$(2) \qquad n(\rho_k) \leqslant C \frac{m^k}{\rho_k^k \cdot \Delta_k} \leqslant C \frac{m^k}{\rho_k^k},$$

wenn $k \leqslant \tau$.

Die Ungleichungen (1) und (2) liefern uns die Abschätzung für $\rho_k$ von unten:

$$(3) \qquad \rho_k \geqslant \frac{1}{C} \left[ \frac{W}{\delta} \cdot \frac{\Delta_k}{m_k} \right]^{\frac{1}{\sigma-k}} \geqslant \frac{1}{C} \left[ \frac{W}{\delta} \frac{1}{m^k} \right]^{\frac{1}{\sigma-k}},$$

wenn $k \leqslant \tau$.

Im folgenden werden wir nicht die Kerne selbst, sondern verbreitete Kerne, das ist Polyedre $W(\bar{\rho}_k)$, wo $\bar{\rho}_k = \frac{\rho_k}{a}$, gebrauchen. Da ist $a$ eine, die Einheit übersteigende Konstante. Die Ungleichungen (1), (2), (3) bleiben richtig auch für $\bar{\rho}_k$, mit dem einzigen Unterschied, dass die Konstanten $C$ mit dem Wuchs der Konstante $a$ wachsen. Die Punkte, die einem verbreiteten Kerne der $k$-ten Ordnung gehören, wollen wir Kernpunkte der $k$-ten Ordnung nennen. Es ist evident, dass die Kernpunkte der $k$-ten Ordnung zugleich auch Kernpunkte der Ordnungen $k+1, k+2, \ldots \sigma$ sind.

Wenn uns ein Kernpunkt der $k$-ten Ordnung gegeben ist, so können wir $\bar{\rho}_k$ von oben abschätzen. Sei $M_k$ ein solcher Punkt, und $M_k'$ seine Spur auf $X$. Wir bezeichnen die Strecke $OM_k$ durch $l_k$, und $OM_k'$ durch $l_k'$. Wenn wir $W(\bar{\rho}_k)$ und mit ihm $OM_k$ einer homotetischen $\bar{\rho}_k$-maligen Vergrösserung unterwerfen, so geht $W(\bar{\rho}_k)$ in $W$ und $l_k$ in einen in $W$ liegenden Vektor $\Lambda_k$ über. Die Projektion von $\Lambda_k$ auf $X$ bezeichnen wir durch $\Lambda'_k$. Also ist:

$$\bar{\rho}_k = \frac{\Lambda_k}{l_k} = \frac{\Lambda_k'}{l_k'},$$

denn es gibt in $V$ keine Gittervektoren, die zu $X$ senkrecht stehen. $\Lambda_k'$ aber liegt ganz in $X$ und darum ist: $\Lambda_k' \leqslant Cm$. Wir bekommen also für $\bar{\rho}_k$ und damit auch für $\rho_k$ eine Abschätzung von oben:

$$(4) \qquad \bar{\rho}_k \leqslant C \frac{m}{l_k'}; \quad \rho_k \leqslant Ca \frac{m}{l_k'} \leqslant C \frac{m}{l_k'}.$$

Die Ungleichungen (3) und (4) geben uns die Möglichkeit eine Abschätzung von oben für die Grösse $\frac{W}{\delta}$ aufzustellen, wenn uns $M_k$ gegeben ist. Wir lösen dazu die Ungleichung (3) in Bezug auf $\left(\frac{W}{\delta}\right)$ und ersetzen in dem grösseren Teil der so gewonnenen Ungleichung $\rho_k$ durch den rechten Teil der Ungleichung (4). Dies gibt:

$$(5) \qquad \frac{W}{\delta} \leqslant C \frac{m^\sigma}{l'^{\sigma-k}} \cdot \frac{1}{\Delta_k} \leqslant C \frac{m^\sigma}{l'^{\sigma-k}}.$$

Diese Abschätzung (5), das Lemma I § 5 und die Formel (2) § 4 zusammenfassend, und die Gleichung: $\Delta_1 = l_1'$ benutzend, bekommen wir:

$$(6) \quad N \leqslant C \min\left[\frac{W}{\delta};\ m^\tau \frac{p_1 \ldots p_{\sigma-\tau}}{q^{\sigma-\tau}};\ \frac{m^\sigma}{l_1'^{\sigma}}, \frac{m^\sigma}{l_2'^{\sigma-2} \cdot \Delta_2}, \ldots \frac{m^\sigma}{l_k'^{\sigma-k} \cdot \Delta_k}, \ldots \frac{m^\sigma}{l_\tau'^{\sigma-\tau} \cdot \Delta_\tau}\right].$$

Wir gebrauchen die folgende Zahlenreihe (siehe § 2):

$$(7) \qquad m^0,\ m^{\frac{1}{\nu}},\ m^{\frac{2}{\nu}}, \ldots m^{\frac{s\nu}{\nu}}, \ldots$$

Da ist $\nu$ eine konstante, aber genügend grosse Zahl. $\frac{W}{\delta}$ liegt zwischen zwei Nachbarzahlen dieser Reihe, nämlich:

$$m^\beta \leqslant \frac{W}{\delta} < m^{\beta+\frac{1}{\nu}}.$$

Seien uns die zwei Zahlen $\sigma$ und $\beta$ unseres Parallelotops $V(p/b)$ gegeben. Wir schreiben die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass der Punkt $(\xi, \eta)$ ein Kernpunkt von der Ordnung $\varkappa$ sei:

$$(8) \qquad \left|l \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\xi_j - q\eta_i\right| \leqslant C p_i \bar{\rho}_\varkappa^{-1}; \quad |\xi_j| \leqslant C m \bar{\rho}_\varkappa^{-1} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots s).$$

Wir wollen in diesen Ungleichungen die Zahl $\bar{\rho}_k$ durch seine Abschätzung von unten nach (3), und in dem neuen Ausdruck $\frac{W}{\delta}$ durch die kleinere Zahl $m^\beta$, ersetzen. Dann werden die rechten Seiten von (8) vergrössert und wir bekommen neue Bedingungen:

$$(8_1) \qquad \left|l \sum_{j=1}^{s} b_{ij}\xi_j - q\eta_i\right| \leqslant C p_i\, m^{-\frac{\beta-\varkappa}{\sigma-\varkappa}}; \quad |\xi_j| \leqslant C m^{\frac{\sigma-\beta}{\sigma-\varkappa}}; \qquad (i, j = 1, 2, \ldots s),$$

die noch nicht hinreichend, doch aber schon notwendig sind. Die Gesamtheit aller Punkte $(\xi, \eta)$, die den Bedingungen $(8_1)$ genügen, bilden den überverbreiteten Kern, dessen Gitterpunkte verallgemeinerte Kernpunkte sind.

Wenn die Zahlen $\sigma$ und $\beta$ gegeben sind, so können wir, mit Hilfe der Ungleichungen ($8_1$), die Spuren der verallgemeinerten Kernpunkte und damit die Kernpunkte selbst, beschränken.

Wir gebrauchen in folgendem noch eine Abschätzungsmethode für $N$, die in dem Falle wirkt, wenn auf dem Lineal $A_s$ der Axe $A$ unseres Parallelotops viele ganze Punkte liegen und wenn obendrein die Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_s$ klein sind. Die ganzen Punkte auf $A_s$ bilden ein neues Gitter $G_0$, dessen Dimensionszahl wir durch $s-k$ $(0 \leqslant k \leqslant s)$ bezeichnen. Der auf der Axe $A$ liegende Teil von $G_0$ besitzt die Dimensionszahl $s-l_1$, wo $l_1 \geqslant k$. Wir bezeichnen diesen Teil wie folgt:

$$G_0(\overbrace{0, \ldots 0}^{s\text{-mal}}) = G_0(0).$$

Sei

$$\overline{G}_0(0, \ldots 0) = \overline{G}_0(0)$$

der Teil von $G_0$, der in homotetisch zweimalig vergrösserten $A$ liegt. Die Dimensionszahl von $\overline{G}_0(0)$ sei $s-l_2$, wo:

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant k$$

ist.

Die Hauptschneidung $S$ unseres Parallelotops mit $E_0^{(0)}$ ist ein rechtwinkliger $s$-dimensionaler Parallelotop, der durch folgende Bedingungen definiert ist:

$$x_1 = 0; \ldots x_s = 0; \quad |y_1| \leqslant \frac{p_1}{q}; \ldots |y_s| \leqslant \frac{p_s}{q}.$$

Wir betrachten auf $S$ ein Gitterstück $P$, dessen Punkte

$$\left(\overbrace{0, \ldots 0,}^{s\text{-mal}} \frac{P_1}{q}, \ldots \frac{P_s}{q}\right)$$

mit ganzen $P_i$ sind. Durch die Punkte von $P$ legen wir eine s-Linealenschar, die zu $A$ parallel sind. Die zu $V(p/b)$ gehörenden Stücke dieser Lineale bezeichnen wir durch:

$$A(P_1, \ldots P_s) = A(P),$$

wo $P_1, \ldots P_s$ die Zähler der Koordinaten des Punktes von $P$ sind, durch welchen unser Lineal gezogen wird. Die ganzen Punkte, die im Lineal des $A(P)$ liegen, bilden ein zu $G_0$ isomorphes Gitter. Der Teil dieses Gitters (wir bezeichnen ihn: $G_0(P_1, \ldots P_s) = G_0(P)$), der in $A(P)$ liegt, kann von $G_0(0)$ verschieden sein, bildet doch einen Teil von $\overline{G}_0(0)$. Die Dimensionszahl von $G_0(P)$ bezeichnen wir durch $s-l_P$, wo $l_P \geqslant l_2 \geqslant k$ ist. Wir unterwerfen alle $G_0(P)$ einer Parallelverschiebung, die alle $G_0(P)$ in $A_s$ überträgt, so dass ein der Punkte aus $G_0(P)$ mit

dem Anfangspunkt zusammenfällt. Die so gebildete Gesamtheit von Gitterpunkten besitzt die Dimensionszahl $s-l$, wo

$$l_P \geqslant l \geqslant l_2 \geqslant k.$$

Die Zahl $l \geqslant l_2$ ist, weil alle $G_0(P)$ einen Teil von $\overline{G}_0(0)$ bilden. Soll die Anzahl der Punkte in $G_0(0)$ zwischen $m^{\gamma-\frac{1}{\nu}}$ und $m^\gamma$ enthalten sein. Dann besitzt auch $\overline{G}_0(0)$ und damit auch alle $G_0(P)$, nach Lemma III § 5 nicht mehr als $Cm^\gamma$ Punkte.

Es gibt in $V$ genau $s-l$ linear-unabhängige Gittervektoren, die zu $A_s$ parallel sind. Es bleibt also noch $\sigma-s+l$ unabhängige von einander und von $A$ Vektoren, die sich darum auf $S$ durch zu $A$ parallelen $s$-dimensionalen Strahlen in $\sigma-s+l$ von einander unabhängigen Vektoren des Gitters $P$ sich projektieren. Das auf ihnen gebaute Teilgitter von $P$ enthält nicht mehr als

$$p_1 p_2 \cdots p_{\sigma-s+l}$$

Punkte. Indem wir diese Anzahl auf die obere Grenze für die Anzahl der Punkte in $G_0(P)$ multiplizieren, bekommen wir eine Abschätzung von oben für die Anzahl der ganzen Punkte in $V(p/b)$:

$$N \leqslant Cm^\gamma p_1 p_2 \cdots p_{\sigma-s+l} \leqslant Cm^{s-l} p_1 p_2 \cdots p_{\sigma-s+l}. \tag{9}$$

Wenn $p_i \leqslant m$ ist, so kann man diese Abschätzung durch die folgende ersetzen:

$$N \leqslant Cm^\gamma p_1 \cdots p_{\sigma-s+l} \leqslant Cm^{s-l} p_1 \cdots p_{\sigma-s+l} \leqslant Cm^{s-k} p_1 \cdots p_{\sigma-s+k}. \tag{10}$$

Die Abschätzungen dieses § zusammenfassend, bekommen wir:

$$N \leqslant C \min\left[\frac{W}{\delta};\quad m^\tau \cdot \frac{p_1 \cdots p_{\sigma-\tau}}{q^{\sigma-\tau}};\quad \frac{m^\sigma}{l_\varkappa'^{\sigma-\varkappa} \cdot \Delta_\varkappa}\,(1 \leqslant \varkappa \leqslant \tau);\quad m^{s-k} p_1 \cdots p_{\sigma-s+k}\,(p_i \leqslant m)\right]. \tag{11}$$

## § 7. Algebraische Hilfssätze

Wir wollen in diesem Paragraphe gewisse Punktmannifaltigkeiten ins Auge ziehen und auf einige von ihren Eigenschaften hinweisen. Trotz der Evidenz dieser Eigenschaften, ist ihr Beweis leider kompliziert. Er ist nämlich gegründet auf einer Aufbauart der Eliminationstheorie bei der die Eliminante eines algebraischen Gleichungssystem mit veränderlichen Koeffizienten auch beim Übergang zu numerischen Koeffizienten noch die Eliminante bleibt. Eine solche Darstellung der Eliminationstheorie wird von mir in nächster Zeit publiziert werden und

dort werden als Beispiel die Sätze dieses Paragraphen bewiesen werden. Hier werden sie ohne Beweis vorgeführt.

Wir werden algebraische und pseudo-algebraische Mannigfaltigkeiten betrachten. Algebraische Mannigfaltigkeiten nennen wir die Gesamtheit der Punkte deren Koordinaten die Lösungen eines algebraischen Gleichungssystems bilden. Pseudo-algebraische Mannigfaltigkeiten nennen wir die Gesamtheit aller Punkte einer algebraischen Mannigfaltigkeit, ausser der Punkte, die einer endlichen Anzahl von anderen algebraischen Mannigfaltigkeiten gehören, deren Dimensionszahlen kleiner sind als die Dimensionszahl der ersten Mannigfaltigkeit. Die leere Menge ist eine algebraische Mannigfaltigkeit und darum bilden die algebraischen Mannigfaltigkeiten eine Teilmenge der Menge von pseudo-algebraischen Mannigfaltigkeiten.

Wir bilden die Matrix $\Delta$ der $\psi_i$-Funktionen, als Linearformen in Bezug auf $(h^{(k-1)})$ betrachtet:

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{1 j_1 \ldots j_{k-2} 1}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)}; \quad \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{1 j_1 \ldots j_{k-2} 2}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)} \ldots \\ \ldots \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{1 j_1 \ldots j_{k-2} s}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)} \\ \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{2 j_1 \ldots j_{k-2} 1}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)}; \quad \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{2 j_1 \ldots j_{k-2} 2}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)} \ldots \\ \ldots \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{2 j_1 \ldots j_{k-2} s}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{s j_1 \ldots j_{k-2} 1}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)}; \quad \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{s j_1 \ldots j_{k-2} 2}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)} \ldots \\ \ldots \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{s j_1 \ldots j_{k-2} s}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)} \end{matrix} \right\|.$$

Oder kürzer in den Bezeichnungen von Lappo-Danilewsky:

$$(1) \qquad \{\Delta\}_{ij} = \sum_{j_1 \ldots j_{k-2}=1}^{s} a_{i j_1 \ldots j_{k-2} j}\, h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-2}}^{(k-2)}.$$

Wir bezeichnen die Minoren dieser Matrix der $\nu$-ten Dimension durch $\Delta^{\nu}$ oder ausführlich durch $\Delta_{l_1, \ldots l_\nu}^{m_1, \ldots m_\nu}$, was den Minor bezeichnet, der aus der $l_1, l_2, \ldots l_\nu$ Spalten und der $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ Kolonnen gebildet ist.

Das Gleichungssystem:

(2) $$\Delta_{l_1, \ldots l_\nu}^{m_1, \ldots m_\nu} = 0; \quad (m_1, \ldots m_\nu; \quad l_1, \ldots l_\nu = 1, 2, \ldots s)$$

bedeutet, dass der Rang der Matrix $\Delta$ kleiner als $\nu$ ist und darum kann das System (2) auch wie folgt dargestellt werden:

(3) $$\text{Rang } \Delta < \nu, \quad \text{oder: Rang } \Delta \leqslant \nu - 1.$$

Das Gleichungssystem (2) definiert eine algebraische Mannigfaltigkeit, die wir durch $\Gamma_{\nu-1}$ bezeichnen. Die Dimensionszahl von $\Gamma_{\nu-1}$ sei $d(\Gamma_{\nu-1}) = d_{\nu-1}$. Est ist evident, dass:

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots \subset \Gamma_{s-1} \subset \Gamma_s.$$

Die Mannigfaltigkeit der Punkte, in denen der Rang von $\Delta$ genau $\nu$ ist, sei $\overline{\Gamma}_\nu$

$$\overline{\Gamma}_\nu = \Gamma_\nu - \Gamma_{\nu-1}; \quad (\nu = 1, 2, \ldots s); \quad \overline{\Gamma}_0 = \Gamma_0.$$

Lemma I «Die Mannigfaltigkeiten $\overline{\Gamma}_\nu$ sind pseudo-algebraisch».
Ihre Dimensionszahl bezeichnen wir durch $d(\overline{\Gamma}_\nu) = \overline{d}_\nu$.
Über die Zahlen $d_\nu$ kann man das folgende Lemma beweisen.

Lemma II. Sei $F(x_1, \ldots x_s)$ eine Form, deren Koeffizienten in dem $N$-dimensionalen Koeffizientenraum $\{a_{i_1, \ldots i_k}\}$ nicht zu einer endlichen Menge gewisser pseudo-algebraischen Mannigfaltigkeiten, deren Dimensionszahlen kleiner als $N$ sind, gehören. Dann gelten die Ungleichungen:

$$d_\nu \leqslant s(k-3) + \nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots s).$$

Solche Formen werden wir weiter «allgemeine Formen» nennen.

Wir gebrauchen weiter zwei folgende algebraische Lemma von allgemeiner Art. Seien $\mathfrak{G}$ eine algebraische Punktmannigfaltigkeit und $L$ ein Lineal der Dimensionen bzw. $\alpha$ und $\beta$. Wir projektieren $\mathfrak{G}_\alpha$ auf $L_\beta$. In jeden Punkt $M$ von $L_\beta$ projektiert sich eine algebraische Mannigfaltigkeit $P(M)$ aus $\mathfrak{G}_\alpha$. Die Gesamtheit der Punkte von $L_\alpha$, für die $P(M)$ genau von Dimension $\mu$ ist, bilden in $L_\alpha$ eine Mannigfaltigkeit $L_\mu(\mathfrak{G}_\alpha)$, der Dimension $d[L_\mu(\mathfrak{G}_\alpha)]$.

Lemma III. Die Mannigfaltigkeiten $L_\mu(\mathfrak{G}_\alpha)$ sind pseudo-algebraisch und also ist:

$$\mu + d[L_\mu(\mathfrak{G}_\alpha)] \leqslant \alpha.$$

(Der Beweis dieser Behauptung, wie evident sie auch sei, gebraucht den ganzen Apparat der Eliminationstheorie).

Es wird weiter das folgende Lemma gebraucht.

Lemma IV. Sei: 1) $M_\mu$ eine pseudo-algebraische Mannigfaltigkeit der $\mu$-ten Dimension; 2) $G_\varkappa$ ein $\varkappa$-dimensionales Gitter im $n$-dimensionalen Raume;

3) $V(C)$ ein $C$-malig homotetisch vergrösserter Grundparallelotop dieses Gitters. Dann gibt es eine solche Konstante $C_0$, die nur von der Anzahl der die Mannigfaltigkeit definierenden Gleichungen und ihren Exponenten abhängt, dass für jedes $C > C_0$ in $V(C)$ Gitterpunkte aus $G_\varkappa$ liegen, die $M_\mu$ nicht zugehören, wenn nur $\mu < \varkappa$ ist.

Der Beweis dieser Behauptung ist in allen algebraischen Lehrbüchern gegeben, aber gewöhnlich wird nicht diese Behauptung selbst formuliert, sondern nur eine Folgerung davon, nämlich, dass eine algebraische Mannigfaltigkeit $\mu$-ter Dimension den $n$-dimensionalen Raum nicht füllen kann, wenn $\mu < n$ ist. (Siehe z. B. E. Netto «Vorlesungen über Algebra» § 337.)

Die Behauptungen dieses Paragraphen sind evident. Ihr Beweis aber (ausser Lemma IV) ist sehr kompliziert, bedanf eines besonderen Apparates der Eliminationstheorie und bildet einen Teil einer Arbeit über die Eliminationstheorie, die bald publiziert wird.

## § 8. Die Fundamentalketten

Wir betrachten den Parallelotop

$$V(p\,|h^{(2)}\ldots h^{(k-1)}|\,a) = V_1:$$

(1)
$$\left| l \sum_{j_1\ldots j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_1\ldots j_{k-1}} x_{j_1}^{(1)} h_{j_2}^{(2)} \ldots h_{j_{k-1}}^{(k-1)} - qy_i \right| \leqslant \bar{p}_i; \quad \left| x_{j_1}^{(1)} \right| \leqslant m; \qquad (i, j_1 = 1, 2 \ldots s)$$
$$\bar{p}_i = \frac{q}{m^{1-\lambda_i}}.$$

Seien $(\sigma_1, \tau_1, \beta_1)$ die Charakteristiken des Parallelotops. Wir schreiben die Bedingungen dafür, dass $(\xi^{(1)})$ eine Spur eines verallgemeinerten Kernpunktes vom Typus $\varkappa_1 \leqslant \tau_1$ sei:

(2)
$$\varkappa_1 \leqslant \tau_1; \quad \left| l \sum_{j_1\ldots j_{k-1}=1}^{s} a^{ij_1\ldots j}{}_{k-1} \xi_{j_1}^{(1)} h_{j_2}^{(2)} \ldots h_{j_{k-1}}^{(k-1)} - qy_i \right| \leqslant p_i^{(1)}; \qquad (i, j = 1, 2 \ldots s).$$
$$\left|\xi_{j_1}^{(1)}\right| \leqslant Cm^{z_1}; \quad p_i^{(1)} = p_i\, m^{-(1-z_1)}; \quad z_1 = \frac{\sigma_1 - \beta_1}{\sigma_1 - \varkappa_1};$$

Nun wollen wir $\Gamma_\nu$ auf $\overline{E^1}$ projektieren. Wir bilden für alle $\mu = 0, 1, 2, \ldots d_\nu$ die Mannigfaltigkeiten $E_\mu^{(1)}(\Gamma_\nu)$ (die Bezeichnung wie im § 7), deren Dimension wir durch $\delta_\mu^{(1)}(\nu)$ bezeichnen. Lemma III des § 7 gibt uns die Ungleichung:

(3)
$$\mu + \delta_\mu^{(1)}(\nu) \leqslant d_\nu,$$

also:

$$\mu \leqslant d_\nu - \delta_\mu^{(1)}(\nu).$$

Nach Lemma IV § 7 gibt es also in verbreiteten Kernen, desto mehr also in überverbreiteten Kernen der Ordnung $\varkappa_1$, ganze Punkte, in deren Spuren $M$ sich solche algebraische Mannigfaltigkeiten $P_\nu(M)$ aus $\Gamma_\nu$ projektieren, dass

$$d[P_\nu(M)] \leqslant \max(d_\nu - \varkappa_1, 0) \leqslant \max[(k-3)s + \nu - \varkappa_1, 0]$$

ist und dies für alle $\Gamma_\nu$ zugleich. Solcher Punkte gibt es viel. Wir wählen unter ihnen einen einzigen Punkt $(\bar{\xi}^{(1)})$ z. B., dem lochsydermischen Prinzip folgend: aus allen passenden Punkten wählen wir die, deren erste Koordinate den kleinsten absoluten Wert hat; wenn es unter diesen Punkten, Punkte mit positiver ersten Koordinate gibt, so lässt man die Punkte mit negativer ersten Koordinate weg. Aus so gewählten Punkten erhalten wir nur die, die analogen Bedingungen in Bezug auf die zweite Koordinate genügen u. s. w. Es ist evident, dass schliesslich ein und nur ein Punkt bleibt, den wir durch $(\bar{\xi}^{(1)})$ bezeichnen und ihn den Fundamentalpunkt des Parallelotops $V_1$ in $\bar{E}^1$ vom Typus $[\sigma_1, \tau_1, \beta_1, \varkappa_1]$ oder die Fundamentalkette der Länge 1 und vom Typus $[\sigma_1, \tau_1, \beta_1, \varkappa_1]$, nennen.

Den Teil von $\Gamma_\nu$, der sich auf $\bar{E}^1$ in den Punkt $(\bar{\xi}^{(1)})$ projektiert, bezeichnen wir durch $\Gamma_\nu(\bar{\xi}^{(1)})$ und $d[\Gamma_\nu(\bar{\xi}^{(1)})] = d_\nu^{(1)}$. Diese Zahl genügt nach (3) der Bedingung

$$(3_1) \qquad d_\nu^{(1)} \leqslant \max(d_\nu - \varkappa_1, 0) \leqslant \max[(k-3)s + \nu - \varkappa_1, 0].$$

Wir betrachten weiter einen neuen Parallelotop:

$$V(p^{(1)} | h^{(3)} \dots h^{(k-1)} | a^{(1)}) = V_2$$

$$(1_2) \quad \left| l \sum_{j_2 \dots j_{k-1}=1}^{s} a^{(1)}_{ij_2 \dots j_{k-1}} x^{(2)}_{j_2} h^{(3)}_{j_3} \dots h^{(k-1)}_{j_{k-1}} - q y_i \right| \leqslant p_i^{(1)}; \quad |x^{(2)}_{j_2}| \leqslant m \quad (i, j_2 = 1, 2 \dots s),$$

wo:

$$a^{(1)}_{ij_2 \dots j_{k-1}} = \sum_{j_1=1}^{s} a_{ij_1 \dots j_{k-1}} \bar{\xi}^{(1)}_{j_1}; \qquad (i, j_2 \dots j_{k-1} = 1, 2, \dots s)$$

Seien $[\sigma_2, \tau_2, \beta_2]$ seine Charakteristiken. Wir wählen wieder $\varkappa_2 \leq \tau_2$ und konstruieren für den Parallelotop $V_2$ seinen überverbreiteten Kern. Wir schneiden weiter $\bar{E}^2$ in pseudo-algebraische Mannigfaltigkeiten $E_\mu^{(2)}(\Gamma_\nu(\bar{\xi}^{(1)}))$, deren Dimension wir durch $\delta_\mu^{(2)}(\nu)$ bezeichnen, und wieder können wir nach Lemma III und IV § 7 einen verallgemeinerten Kernpunkt $(\bar{\xi}^{(2)})$ so definieren, dass die Dimension $d_\nu^{(2)}$ von $\Gamma_\nu(\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)})$ der Bedingung genügt:

$$(3_2) \qquad d_\nu^{(2)} \leqslant \max(d_\nu - \varkappa_1 - \varkappa_2, 0) \leqslant \max[(k-3)s + \nu - \varkappa_1 - \varkappa_2, 0].$$

Da ist $\Gamma_\nu(\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)})$ die algebraische Mannigfaltigkeit der Punkte aus $\Gamma_\nu(\bar{\xi}^{(1)})$, die sich in $(\bar{\xi}^{(2)})$ auf $\bar{E}^2$ projektieren. Den Punkt $(\bar{\xi}^{(2)})$, der wieder eindeutig mit Hilfe

des lochsidermischen Prinzips definiert ist, wollen wir den Fundamentalpunkt des Parallelotops $V_2$ nennen. Das Zahlensystem $(\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)})$ bildet eine «fundamentale» Kette der Länge 2, der Ordnungen $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ und vom Typus.

$$[\sigma_1, \tau_1, \beta_1, \varkappa_1; \ \sigma_2, \tau_2, \beta_2, \varkappa_2] \cdot (\varkappa_1 \leqslant \tau_1; \ \varkappa_2 \leqslant \tau_2).$$

Diesen Prozess kann man fortsetzen und so bilden wir eine «fundamentale» Kette der Länge $g$: $(\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)} \dots \bar{\xi}^{(g)})$, der Ordnungen $(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_g)$ und vom Typus $G_g\,[\sigma_1, \tau_1, \beta_1, \varkappa_1; \dots \sigma_g, \tau_g, \beta_g, \varkappa_g]\,(\varkappa_1 \leqslant \tau_1, \dots \varkappa_g \leqslant \tau_g)$, wo $(\bar{\xi}_g)$ wieder aus drei Bedingungen definiert wird:

1) $(\bar{\xi}^{(g)})$ ist ein verallgemeinerter Kernpunkt des Parallelotops $V_g$, das ist: Definition von $V_g$:

$$\left| l \sum_{j_g \dots j_{k-1}=1}^{s} a^{(g-1)}_{ij_g \dots j_{k-1}} x^{(g)}_{j_g} h^{(g+1)}_{j_{g+1}} \dots h^{(k-1)}_{j_{k-1}} - q y_i \right| \leqslant p_i^{(g-1)};$$

$$|x^{(g)}_{j_g}| \leqslant m;$$

$$p_i^{(g-1)} = p_i m^{-(1-z_1)-\dots-(1-z_{g-1})}; \quad z_\alpha = \frac{\sigma_\alpha - \beta_\alpha}{\sigma_\alpha - \varkappa_\alpha}$$

$$a^{(g-1)}_{ij_g \dots j_{k-1}} = \sum_{j_1 \dots j_{g-1}=1}^{s} a_{ij_1 \dots j_{k-1}} \bar{\xi}^{(1)}_{j_1} \dots \bar{\xi}^{(g-1)}_{j_{g-1}}. \left(\begin{matrix} i, \ j_g = 1, 2 \dots s \\ \alpha = 1, 2 \dots g-1 \end{matrix}\right).$$

Der überverbreitete Kern von $V_g$, in dem $(\xi^{(g)})$ liegen muss, wird durch die Ungleichungen definiert:

$$\varkappa_g \leqslant \tau_g; \quad \left| l \sum_{j_g \dots j_{k-1}=1}^{s} a^{(g-1)}_{ij_g \dots j_{k-1}} \xi^{(g)}_{j_g} h^{(g+1)}_{j_{g+1}} \dots h^{(k-1)}_{j_{k-1}} - q y_i \right| \leqslant p_i^{(g)}; \quad |\xi^{(g)}_{j_g}| \leqslant C m^{z_g};$$

wo:

$$p_i^{(g)} = p_i^{(g-1)} m^{-(1-z_g)}; \quad z_g = \frac{\sigma_g - \beta_g}{\sigma_g - \varkappa_g}; \qquad (i, j_g = 1, 2 \dots s).$$

2)

$$d_\nu^{(g)} \leqslant \max\,[d_\nu - \varkappa_1 - \dots - \varkappa_g, 0] \leqslant$$

$$\leqslant \max\,[(k-3)s + \nu - \varkappa_1 - \dots - \varkappa_g, 0] \qquad (\nu = 0, 1, 2 \dots s)$$

wo:

$$d_\nu^{(g)} = d\,[\Gamma_\nu(\bar{\xi}^{(1)}, \dots \bar{\xi}^{(g)})]$$

ist. Da ist:

$$\Gamma_\nu(\bar{\xi}^{(1)}, \dots \bar{\xi}^{(g)})$$

die Gesammtheit der Punkte aus

$$\Gamma_\nu[\bar{\xi}^{(1)}, \dots \bar{\xi}^{(g-1)}],$$

die sich auf $\overline{E^g}$ in $(\bar{\xi}^{(g)})$ projektieren.

Diesen beiden Bedingungen genügen nach Lemma III und IV § 7 viele Punkte $(\xi^g)$. Ein einziger unter ihnen wird gewählt mit Hilfe der dritten Bedingung:

3) Das loxidermische Prinzip.

Die fundamentalle Kette der Länge $k-2$ wird das Fundamentalsystem

$$(\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)}, \ldots \bar{\xi}^{(k-2)})$$

des Punktes $(h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots h^{(k-1)})$ oder kürzer $(h)$ der Ordnung $(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{k-2})$ genannt. Der Punkt $(h^{(1)}, \ldots h^{(k-1)})$ gehört zum Typus:

$$G_{k-2}[\sigma_1, \tau_1, \beta_1, \varkappa_1; \ldots \sigma_{k-2}, \tau_{k-2}, \beta_{k-2}, \varkappa_{k-2}],$$

wo:

$$\varkappa_i \leqslant \tau_i \qquad (i=1, 2 \ldots k-2).$$

Wir sagen von der Kette $(\bar{\xi}^{(1)}, \ldots \bar{\xi}^{(g)})$ auch, dass s i e a l s F u n d a m e n t a l k e t t e (oder, wenn $g=k-2$ ist, als F u n d a m e n t a l s y s t e m) zum Typus $G_\pi$ (wo: $\pi \geqslant g$ ist) gehört.

Es ist evident, dass ein Punkt $(h)$ kann im allgemeinen je nach der Wahl der Werte von $\varkappa_1, \ldots \varkappa_g$, zu vielen Typen gehören und demgemäss verschiedene Fundamentalketten besitzen.* Wir werden in folgendem diese zwei Eigenschaften nicht als unabhängig halten. Wenn wir sagen, dass ein Punkt zum Typus $G_\pi$ gehört und die Fundamentalkette $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(g)})$ $(g \leqslant \pi)$ besitzt, so ist es die Kette von der Ordnung $(\varkappa_1, \ldots \varkappa_g)$, wo $\varkappa_1, \ldots \varkappa_g$ die ersten $g$ Zahlen $\varkappa_i$ aus $G_\pi$ sind. Wir wollen also weiter von einer Kette eines Punktes nur dann sprechen, wenn der Typus, dehm der Punkt zugehört angewiesen ist.

Die Eindeutigkeit der Gehörigkeit der Punkte $(h)$ zu einem Typus ist für unsere Ziele nicht nötig. Wir schätzen, nämlich, die Anzahl der zu einem Typus gehörigen Punkte $(h)$ von oben ab. Wenn wir einen Punkt in verschiedenen Typen treffen und darum ihn mehrmals zählen, so wird die Abschätzung dadurch nur verstärkt.

Es ist schliesslich zu bemerken, dass ein beliebiges System $(\varkappa_1, \ldots \varkappa_g)$ nicht für jeden Punkt gewählt werden kann. Es hängt von den Wertsystemen $(\sigma_1, \tau_1, \beta_1) \ldots (\sigma_g, \tau_g, \beta_g)$ ab. Die Disjunktion, ob ein Punkt $(h)$ die Werte $(\varkappa_1, \ldots \varkappa_g)$ zulässt, ist aber nicht einfach, weil die Zahlen $(\sigma_i, \tau_i, \beta_i)$ selbst von der Wahl der hervorstehenden Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{i-1}$ abhängen. Für die Punkte aber, für die uns diese Definition nötig sein wird, werden wir im § 9 die Werte von $(\varkappa_1 \ldots \varkappa_g)$ sogar eindeutig definieren können.

* Die Zahl aber aller möglichen Typen ist eine von $m$ unabhängige Grösse, die die Grenze

$$\sum_{g=1}^{k-2} (2\nu s^4)^g$$

nicht übersteigt.

### § 9. Die Abschätzung von $T_\lambda$.

Nun können wir die Anzahl der Punkte $(h) = (h^{(1)}, h^{(2)} \dots h^{(k-1)})$, die zum Typus $G_\pi(\sigma_1, \dots \varkappa_\pi)$ gehören, von oben abschätzen. Die Weise, auf die wir die Werte für $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots$ wählen, wird niedriger auseinandergesetzt. Wir werden sie weiter als definite Zahlen betrachten. Wir bezeichnen durch

$$T_\lambda^{(r)}(\xi^{(1)} \dots \xi^{(\alpha)}, G_\pi)\,(\alpha = 0, 1, 2, \dots r-1;\ r = 1, 2, \dots \pi+1)$$

die Anzahl der Punkte $(h^{(r)}, \dots h^{(k-1)})$, die man bei einer passenden Wahl des Punktes $(h^{(1)}, \dots h^{(r-1)})$ bis einen solchen Punkt $(h^{(1)}, \dots h^{(k-1)})$ ergänzen kann, welcher zum Typus $G_\pi$ gehört und als Fundamentalkette der Länge $\alpha$ — die Kette $(\xi^{(1)}, \dots \xi^{(\alpha)})$ besitzt. Die grösste der Zahlen $T_\lambda^{(r)}(\xi^{(1)}, \dots \xi^{(\alpha)}, G_\pi)$, für verschiedene Ketten $(\xi^{(1)} \dots \xi^{(\alpha)})$ bezeichnen wir durch $T_\lambda^{(\alpha, r)}(G_\pi)$. Es gelten folgende vier Ungleichungen:

(1) $$T_\lambda^{(\alpha, r)}(G_\pi) \leqslant Cm^{k-r}, \quad \text{wenn:} \quad r-1 \leqslant \pi.$$

(2) $$T_\lambda^{(\alpha, r)}(G_{\pi'}) \leqslant T_\lambda^{(\alpha, r)}(G_\pi), \quad \text{wenn:} \quad r-1 \leqslant \pi \leqslant \pi'.$$

(3) $$T_\lambda^{(r-2, r)}(G_\pi) \leqslant Cm^{\frac{\sigma_{r-1} - \beta_{r-1}}{\sigma_{r-1} - \varkappa_{r-1}} \cdot s + \beta_r} \cdot T_\lambda^{(r-1, r+1)}(G_\pi), \quad \text{wenn:} \quad r \leqslant \pi.$$

(4) $$T_\lambda^{(0, 1)}(G_\pi) \leqslant Cm^{\beta_1} T_\lambda^{(0, 2)}(G_{\pi'}), \quad \text{wenn:} \quad \pi \geqslant 1.$$

Die Ungleichungen (1) und (2) sind evident. Wir beweisen die Behauptung (4). Das Ungleichungssystem:

(5) $$\left| l \sum_{j_1 \dots j_{k-1} = 1}^{s} a_{ij_1 \dots j_{k-1}} x_{j_1}^{(1)} h_{j_2}^{(2)} \dots h_{j_{k-1}}^{(k-1)} - q y_i \right| \leqslant \bar{p}_i; \qquad (i, j_1 = 1, 2, \dots s)$$
$$\left| x_{j_1}^{(1)} \right| \leqslant m;$$

besitzt nicht mehr als $m^{\beta_1}$ Lösungen in Bezug auf $(x^{(1)})$ für jeden fixierten Punkt $(h^{(1)}, \dots h^{(k-1)})$, der zum Typus

$$G_\pi[\sigma_1, \tau_1, \beta_1, \varkappa_1; \dots \sigma_\pi, \tau_\pi, \beta_\pi, \varkappa_\pi]\ (\pi \geqslant 1)$$

gehört. Die Anzahl verschiedener Punkte $(h^{(2)} \dots h^{(k-1)})$, die bis einem zum Typus $G_\pi$ gehörenden Punkt $(h)$ ergänzt werden können durch die Hinzufügung eines entsprechenden $(h^{(1)})$, ist durch $T_\lambda^{(0, 2)}(G_\pi)$ bezeichnet.

Nun beweisen wir die Ungleichung (3). Die Anzahl der Punkte $(h^{(r)} \dots h^{(k-1)})$ solcher, dass sie den Typus $G_\pi$ und die Kette $(\xi^{(1)} \dots \xi^{(r-2)})$ zulässt, kann wie folgt abgeschätzt werden. Wir konstruieren alle mögliche Fundamentalketten der Länge $(r-1)$ aller Punkte $(h)$ vom Typus $G_\pi$, deren Anfang mit $(\xi^{(1)} \dots \xi^{(r-2)})$

zusammenfällt. Mit anderen Worten wir wählen einen passenden und notwendig der Bedingung

$$|\xi_i^{(r-1)}| \leqslant Cm^{z_{r-1}}$$

genügenden Punkt $(\xi^{(r-1)})$ und fügen ihn zu unserer Kette $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(r-2)})$ hinzu. Die Anzahl solcher Ketten ist kleiner als $Cm^{s \cdot z_{r-1}}$. Die Anzahl der Punkte

$$(h^{(r)} \ldots h^{(k-1)}),$$

die eine solche fixierte Kette $(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(r-1)})$ zulassen, übersteigt nicht das Produkt folgender Faktoren:

1) Die Anzahl der Punkte $(h^{(r+1)}, \ldots h^{(k-1)})$, die zu Punkten $(h)$ ergänzt werden können, die in $G_\pi$ liegen und die Kette $(\xi^{(1)} \ldots \xi^{(r-1)})$ zulassen — eine obere Grenze für diese Grösse war höher durch $T_\lambda^{(r-1, r+1)}(G_\pi)$ bezeichnet, und 2) die Anzahl der Punkte $(h^{(r)})$, durch die man den ersten Schritt dieser Ergänzung ausführen kann. Alle solche $(h^{(r)})$ liegen im Parallelotop:

$$\left| l \sum_{j_r \ldots j_{k-1}=1}^{s} a^{(r-1)}_{ij_r \ldots j_{k-1}}(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(r-1)})\, x^{(r)}_{j_r} h^{(r+1)}_{j_{r+1}} \ldots h^{(k-1)}_{j_{k-1}} - qy_i \right| \leqslant p_i^{(r-1)} =$$
$$= C\overline{p}_i\, m^{-(1-z_1)-\ldots-(1-z_{z-1})}; \quad |x^{(r)}_{j_r}| \leqslant m; \qquad (i, j_r = 1, 2, \ldots s).$$

Die Anzahl der Punkte $(x^{(r)})$, die durch dieses Ungleichungssystem definiert sind und damit auch die Grösse des zweiten Faktors, übersteigt $Cm^{\beta_x}$ nicht. Also bekommen wir die Ungleichung (3).

Von der Ungleichung (4) ausgehend wenden wir die Ungleichung (3) wiederholt an.

Wir gewinnen die Abschätzung:

$$T_\lambda^{(0,1)}(G_\pi) \leqslant Cm^{\beta_1 + \ldots + \beta_r + s\frac{\sigma_1 - \beta_1}{\sigma_1 - x_1} + \ldots + s\frac{\sigma_{r-1} - \beta_{r-1}}{\sigma_{r-1} - x_{r-1}}} \cdot T_\lambda^{(r-1, r+1)}(G_\pi), \tag{6}$$
$$\text{wo:} \quad \pi = 1, 2, \ldots k-2; \quad r \leqslant \pi.$$

Wenn die Zahlen $\beta_i$ klein sind, so wird die Lösung unseres Problems schon durch diese Formel geleistet. es sei:

$$\beta_1 \leqslant (1 - c_k + \overline{\lambda}) \cdot s,$$

wo

$$\overline{\lambda} = \frac{3}{4}\lambda$$

ist.

Dann gibt (6) für $r = 1$ mit Hilfe der trivialen Abschätzung (1):

$$T_\lambda^{(0,1)}(G_\pi) \leqslant Cm^{(k-1-c_k+\overline{\lambda})s},$$

was genügt. Sei weiter:

$$\beta_1 > (1 - c_k + \bar{\lambda})s$$

und:

$$\beta_\alpha \geqslant \left\{1 - 2^{\alpha-1} K_1 \ldots K_{\alpha-1}(c_k - \bar{\lambda}) - \sum_{\rho=1}^{\alpha-1} 2^{\alpha-1-\rho} K_\rho \ldots K_{\alpha-1} \Pi_{\sigma_\rho - s}\right\} \cdot s;$$

(7₁)

$$\text{wo:}\quad \alpha = 2, \ldots r-1;\quad K_i = \frac{s}{\sigma_i - \varkappa_i} > 1;$$

$s \cdot \Pi_d = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d$ wenn: $d > 0$ und: $s \cdot \Pi_d = 0$ wenn: $d \leqslant 0$

(7₂) $$\beta_r \leqslant \left\{1 - 2^{r-1} K_1 \ldots K_{r-1}(c_k - \bar{\lambda}) - \sum_{\rho=1}^{r-1} 2^{r-1-\rho} K_\rho \ldots K_{r-1} \Pi_{\sigma_\rho - s}\right\} \cdot s \cdot$$

Dann bekommen wir nach der zweiten Abschätzung (11) § 6:

$$Cm^{2\tau_\alpha - \sigma_\alpha + \Pi_{\sigma_\alpha - \tau_\alpha} \cdot s} \geqslant Cm^{\beta_\alpha},$$

also:

$$\beta_\alpha \leqslant 2\tau_\alpha - \sigma_\alpha + \Pi_{\sigma_\alpha - \tau_\alpha} \cdot s,$$

also:

$$\sigma_\alpha \leqslant 2\tau_\alpha - \beta_\alpha + \Pi_{\sigma_\alpha - \tau_\alpha} \cdot s \leqslant 2s - \beta_\alpha + \Pi_{\sigma_\alpha - \tau_\alpha} \cdot s \leqslant$$

(7₃) $$\leqslant \left\{1 + 2^{\alpha-1} K_1 \ldots K_{\alpha-1}(c_k - \bar{\lambda}) + \sum_{\rho=1}^{\alpha-1} 2^{\alpha-1-\rho} K_\rho \ldots K_{\alpha-1} \Pi_{\sigma_\rho - s} + \Pi_{\sigma_\alpha - s}\right\} \cdot s$$

$$\sigma_\alpha - \beta_\alpha \leqslant$$

(7₄) $$\leqslant \left\{2^\alpha K_1 \ldots K_{\alpha-1}(c_k - \bar{\lambda}) + \sum_{\rho=1}^{\alpha-1} 2^{\alpha-\rho} K_\rho \ldots K_{\alpha-1} \Pi_{\sigma_\rho - s} + \Pi_{\sigma_\alpha - s}\right\} \cdot s$$

(7₅) $$\frac{\sigma_\alpha - \beta_\alpha}{\sigma_\alpha - \varkappa_\alpha} \leqslant \left\{2^\alpha K_1 \ldots K_\alpha (c_k - \bar{\lambda}) + \sum_{\rho=1}^{\alpha} 2^{\alpha-\rho} K_\rho \ldots K_\alpha \Pi_{\sigma_\rho - s}\right\}$$

$$\left(\text{wo}\ K_\alpha = \frac{s}{\sigma_\alpha - \varkappa_\alpha} > 1\right)$$

$$\beta_\alpha + \frac{\sigma_\alpha - \beta_\alpha}{\sigma_\alpha - \varkappa_\alpha} \cdot s = \sigma_\alpha K_\alpha - \beta_\alpha (K_\alpha - 1) \leqslant$$

(7₆) $$\leqslant \left\{1 + 2^\alpha K_1 \ldots K_\alpha (c_k - \bar{\lambda}) + \sum_{\rho=1}^{\alpha} 2^{\alpha-\rho} K_\rho \ldots K_\alpha \Pi_{\sigma_\rho - s} -\right.$$

$$\left. - 2^{\alpha-1} K_1 \ldots K_{\alpha-1}(c_k - \bar{\lambda}) - \sum_{\rho=1}^{\alpha-1} 2^{\alpha-1-\rho} K_\rho \ldots K_{\alpha-1} \Pi_{\sigma_\rho - s}\right\} \cdot s.$$

und analog:

(7₇) $$\beta_1 + \frac{\sigma_1 - \beta_1}{\sigma_1 - \varkappa_1} \cdot s \leqslant (1 - c_k + \bar{\lambda})s + [2 K_1 (c_k - \bar{\lambda}) + K_1 \Pi_{\sigma_1 - s}] \cdot s$$

Wenn wir durch diese Abschätzungen die entsprechenden Glieder des Exponenten in (6) ersetzen und die Grösse $T_{\lambda}^{(r-1,\, r+1)}(G_{\pi})$ nach (1) abschätzen, so bekommt (6) die Gestalt:

$$T_{\lambda}^{(0,\,1)}(G_{\pi}) \leqslant Cm^{Q},$$

wo:

$$Q = (1 - c_k + \bar{\lambda})s +$$
$$+ s\sum_{\alpha=1}^{r-1}\left\{2^{\alpha}K_1\ldots K_{\alpha}(c_k - \bar{\lambda}) + \sum_{\rho=1}^{\alpha}2^{\alpha-\rho}K_{\rho}\ldots K_{\alpha}\varPi_{\sigma_{\rho}-s}\right\} -$$
$$- s\sum_{\alpha=1}^{r-2}\left\{2^{\alpha}K_1\ldots K_{\alpha}(c_k - \bar{\lambda}) + \sum_{\rho=1}^{\alpha}2^{\alpha-\rho}K_{\rho}\ldots K_{\alpha}\varPi_{\sigma_{\rho}-s}\right\} + (r-2)\cdot s +$$
$$+ (k - r - 1)s + \beta_r = (k-2)\cdot s + \beta_r - (c_k - \bar{\lambda})\cdot s +$$
$$+ \left\{2^{r-1}K_1\ldots K_{r-1}(c_k - \bar{\lambda}) + \sum_{\rho=1}^{r-1}2^{r-1-\rho}K_{\rho}\ldots K_{r-1}\varPi_{\sigma_{\rho}-s}\right\}\cdot s.$$

Wenn die Bedingung $(7_2)$ erfüllt ist, so ist:

$$Q \leqslant (k - 1 - c_k + \bar{\lambda})\cdot s,$$

was genügt. Soll aber die Bedingung $(7_1)$ für alle $\alpha = 2, \ldots k-2$ erfüllt sein. Dann bekommt die Formel (6) die Gestalt:

$$\text{(8)}\qquad T_{\lambda}^{(0,\,1)}(G) \leqslant Cm^{\sum\limits_{i=1}^{k-3}\frac{\sigma_i-\beta_i}{\sigma_i-x_i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2}\beta_i}\cdot T_{\lambda}^{(k-3,\,k-1)}(G) \leqslant$$
$$\leqslant Cm^{\sum\limits_{i=1}^{k-2}\left(\beta_i + \frac{\sigma_i-\beta_i}{\sigma_i-x_i}\right)}\cdot T_{\lambda}^{(k-2,\,k-1)}(G),$$

wo $T_{\lambda}^{(k-2,\,k-1)}(G)$ die grösste Anzahl der Punkte in allen Parallelotopen

$$\text{(9)}\qquad \left|l\cdot\sum_{j_{k-1}=1}^{s}a_{ij}^{(k-2)}(\xi^{(1)},\ldots\xi^{(k-2)})x_{j_{k-1}}^{(k-1)} - qy_i\right| \leqslant p_i^{(k-2)} =$$
$$= Cq\cdot m^{-(k-1)+\sum\limits_{j=1}^{k-2}\frac{\sigma_j-\beta_j}{\sigma_j-x_j}+\lambda_i}$$

ist, in denen $(\xi^{(1)}\ldots\xi^{(k-2)})$ Fundamentalsystemen von Punkten des Typus $G$ sind, also notwendig den Bedingungen:

$$\left|\xi_j^{(i)}\right| \leqslant Cm^{\frac{\sigma_i-\beta_i}{\sigma_i-x_i}}\qquad (i = 1, 2, \ldots k-2;\ j = 1, 2, \ldots s)$$

genügen. Die Anzahl der Punkte im Parallelotop (9) werden wir zweifach abschätzen, nämlich mit Hilfe des zweiten und vierten Teile der Formel (11) § 6.

Wir erinnern die Bezeichnungen des § 6. Die Dimensionszahl der Menge der Gitterpunkte, die im Parallelotop (9) liegen, sei $\sigma'$. Unter sie verbindenden Vektoren gibt es genau $s-l$ linear-unabhängige zur Axe $A_s$ parallelen Vektoren. Die übrigen $\sigma'-s+l$ Vektoren, die mit den $s-l$ ersteren ein vollständiges Vektorensystem bilden, sind in Bezug auf $A_s$ linear-unabhängig. Dies gibt:

$$T_\lambda^{(k-2,\,k-1)}(G) \leqslant Cm^{s-l}\, p_1^{(k-2)} \ldots p_{\sigma'-s+l}^{(k-2)} =$$
$$= Cm^{s-l} \cdot m^{-(k-1)(\sigma'-s+l)+(\sigma'-s+l)\,\omega} \cdot q^{\sigma'-s+l} \cdot m^{\Pi_{\sigma'-s+l^s}}; \quad \text{wo:} \quad \omega = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\sigma_i - \beta_i}{\sigma_i - \varkappa_i}.$$

Sei $\sigma'-s=\delta$ und $q=m^{n+\alpha}$. Unsere Abschätzung kann man, wie folgt, darstellen:

$$T_\lambda^{(k-2,\,k-1)}(G) \leqslant Cm^{s-[(k-n-\alpha-\omega)\,l-(n+1+\alpha+\omega-k)\,\delta]+\Pi_{\sigma'-s+l}\cdot s}. \tag{10}$$

Sei $\tau'$ ($\tau' \leqslant s$) der Wert der Zahl $\tau$ aus § 6 für unseren Parallelotop (9). Dann gibt der zweite Teil der Formel (11) § 6 die Abschätzung:

$$\begin{aligned} T_\lambda^{(k-2,\,k-1)}(G) &\leqslant Cm^{\tau'}\, p_1^{(k-2)} \ldots p_{\sigma'-\tau'}^{(k-2)} \cdot q^{-(\sigma'-\tau')} \leqslant \\ &\leqslant Cm^{\tau'-(\sigma'-\tau')(k-1)+(\sigma'-\tau')\,\omega+\Pi_{\sigma'-\tau'}\cdot s} \leqslant Cm^{s-(k-1-\omega)\,\delta+\Pi_{\sigma'-s}\cdot s}. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Zahl $\omega$ ist leicht von oben abschätzbar nach $(7_5)$. Seien alle Zahlen $K_i \leqslant K$ Dann ist nach $(7_5)$ gewiss:

$$\omega < \omega_0 = \frac{R_{k,\,q}}{(2K)^2}, \quad \text{wo:} \quad R_{k,\,q} = \min\left[1, \frac{1}{2}(k-n-\alpha)\right],$$

wenn:

$$c_k \leqslant \frac{\frac{1}{2} R_{k,\,q}}{(2K)^k}; \quad k \leqslant K = \frac{s}{\left[\frac{s}{k}\right]} < k+1. \tag{12}$$

Wir werden im folgenden zwei Fälle unterscheiden:

I, $m^{\alpha_0} \geqslant q \geqslant m^{1+\omega_0}$, $100 : k > \alpha_0 > k$-1 und II, $m^{1+\omega_0} > q \geqslant m$.

Damit auf $A$ ein Gitterpunkt trifft, müssen seine Koordinaten den Bedingungen:

$$l \sum_{j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_{k-1}}^{(k-2)}(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(k-2)})\, h_{j_{k-1}}^{(k-1)} = qy_i; \quad |h_{j_{k-1}}^{(k-1)}| \leqslant m; \quad (i, j_{k-1} = 1, 2, \ldots s) \tag{13}$$

genügen. Weil im ersten Falle die Summe links kleiner als $q$, und $(l, q) = 1$ sind, so ist:

$$\sum_{j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_{k-1}}^{(k-2)}(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(k-2)})\, h_{j_{k-1}}^{(k-1)} = 0; \; y_i = 0; \; |h_{j_{k-1}}^{(k-1)}| \leqslant m; \; (i, j_{k-1} = 1, 2, \ldots s). \tag{14}$$

Damit die Gitterpunkte auf (13) eine $(s-l)$-dimensionale Menge bilden, muss der Rang $r$ der Matrix $\|a_{ij_{k-1}}^{(k-2)}\|$ die Zahl $l$ nicht übersteigen. Wir können aber nach der Bedingung 2) § 8 für die Zahl $r$ die Ungleichung garantieren:

$$l \geqslant r \geqslant \max\left(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_{k-2} - s(k-3),\ 0\right).$$

Nun fixieren wir die Wahl der Zahlen $\varkappa_i$. Wegen $(7_1)$, wenn $K_i \leqslant K$ ist, kann man nach (12) finden:

$$s - \beta_i \leqslant \frac{sR_{k,q}}{(2K)^{k-i+1}} \leqslant \frac{s \cdot R_{k,q}}{(2K)^3}.$$

Also ist stets:

$$\tau_i \geqslant \beta_i \geqslant \left[1 - \frac{R^{k,q}}{(2K)^{k-i+1}}\right]s \geqslant \left[1 - \frac{R_{k,q}}{(2K)^3}\right]s.$$

Andererseits ist:

$$\sigma_i < \left[1 + \frac{R_{k,q}}{(2K)^{k-i+1}}\right]s \leqslant \left[1 + \frac{R_{k,q}}{(2K)^3}\right]s.$$

Also kann man stets für $\varkappa_i$ die Grösse:

(15) $$\varkappa_i = \sigma_i - \frac{s}{K}$$

wählen, weil

$$\frac{s}{K} > \frac{2sR_{k,q}}{(2K)^3}$$

ist. Da ist $K$ nach (12) eine solche Zahl, dass $\frac{s}{K}$ ganz ist. Damit sind alle $K_i$ einander und der Zahl $K$ gleich. Wir bekommen für $l$ eine Abschätzung von unten:

$$l \geqslant \beta_1 + \ldots + \beta_{k-2} - s\frac{k-2}{K} - s(k-3) \geqslant \left[1 - \frac{k-2}{K} - \frac{R_{k,q}}{4K^3}\right] \cdot s.$$

Die Zahl $\delta$ kann beliebige Werte annehmen und kann die Abschätzung (10) (wenn $\delta$ zu gross wird) verderben. In diesem Falle aber kann man die Abschätzung (11) benutzen. Die schlechtste Abschätzung bekommen wir bei solchen Werten von $\delta$, die die Exponenten von (10) und (11) einander gleich machen. Aus dieser Bedingung finden wir nun das schlechtste $\delta$ und damit auch eine von $\delta$ unabhängige Abschätzung für $T_\lambda^{(k-2,\,k-1)}(G)$:

$$(k-n-\alpha-\omega)\,l - (n+1+\alpha+\omega-k)\,\delta = (k-1-\omega)\,\delta;$$

also:

$$\delta = \frac{k-n-\alpha-\omega}{n+\alpha} \cdot l$$

(16) $$T_\lambda^{(k-2,\,k-1)}(G) \leqslant Cm^{\,s-(k-1-\omega)\,(k-n-\alpha-\omega)\left[\beta_1 + \cdots + \beta_{k-2} - s\frac{k-2}{K} - s(k-3)\right]\frac{1}{n+\alpha} + \lambda s}.$$

Diese Abschätzung in (6) hereinsetzend finden wir:

$$(6_1)\qquad T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant$$
$$\leqslant C m^{s - \frac{1}{n+\alpha}(k-1-\omega)(k-n-\alpha-\omega)\left[\beta_1 + \cdots + \beta_{k-2} - s\frac{k-2}{K} - s(k-3)\right] + \beta_1 + \cdots + \beta_{k-2} + \omega s + \lambda s}.$$

Die Grösse:

$$B = \beta_1 + \ldots + \beta_{k-2}$$

kann man wie folgt von unten und von oben abschätzen:

$$(k-2)s \geqslant B \geqslant$$
$$\geqslant (k-2)s - \left\{(c_k - \lambda)\sum_{\alpha=1}^{k-2} 2^{\alpha-1} K^{\alpha-1} + \lambda \sum_{\alpha=2}^{k-2}\sum_{\rho=1}^{\alpha-1} 2^{\alpha-1-\rho} K^{\alpha-\rho}\right\} s \geqslant$$
$$\geqslant [(k-2) - c_k \cdot 2(2K)^{k-3}] \cdot s.$$

Wenn wir in $(6_1)$ $\omega$ durch $\frac{R_{k,q}}{(2K)^2}$ ersetzen, so wird der Exponent der rechten Seite dadurch nur noch vergrössert. Der Koeffizient von $B$ im Exponent von $(6_1)$ ist positiv, Null oder negativ, je nach dem Werte von $n$, nämlich wenn:

$$\left[k - 1 - \frac{R_{k,q}}{(2K)^2}\right] \cdot \left[k - \frac{R_{k,q}}{(2K)^2} - (n+\alpha)\right] \cdot \frac{1}{n+\alpha} \lesseqgtr 1.$$

Im ersten Falle ersetzen wir $B$ durch seinen grössten Wert $(k-2)s$, im zweiten Falle lassen wir $B$ weg und im dritten Falle ersetzen wir $B$ durch seine Abschätzung von unten, nämlich durch

$$[(k-2) - 2c_k \cdot (2K)^{k-3}] \cdot s.$$

Wir bekommen drei Ungleichungen. Im ersten Falle:

$$T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant C m^{(k-1)s - \frac{1}{n+\alpha}\left[k-1-\frac{R_{k,q}}{(2K)^2}\right]\left[k-n-\alpha-\frac{R_{k,q}}{(2K)^2}\right]\cdot\left(1-\frac{k-2}{K}\right)s + \frac{R_{k,q}}{(2K)^2}s + \lambda s}.$$

Fur $R_{k,q}$ die Grösse $\frac{1}{2}[k-(n+\alpha)]$ setzend, finden wir:

$$(17_1)\qquad T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant C m^{(k-1)s - \frac{R_{k,q}}{2K}s + \lambda s}.$$

Im zweiten Falle:

$$(17_2)\qquad T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant C m^{(k-1)s - \left(1-\frac{k-2}{K}\right)s + \lambda s}.$$

Im dritten Falle:

$$(17_3)\qquad T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant C m^{(k-1)s - \frac{R_{k,q}}{(2K)}s + \lambda s}.$$

Wir bekommen also die gemeine Abschätzung für die Typen, bei welchen die Bedingung $(7_2)$ für kein

$$r = 1, 2, \ldots k-2$$

gilt:

$$T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant Cm^{(k-1)s - \frac{R_{k,q}}{2(k+1)} \cdot s + \lambda s} \tag{17}$$

oder für die Typen, bei welchen die Bedingung $(7_2)$ für ein $r \leqslant k-2$ gilt:

$$T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant Cm^{(k-1)s - (c_k - \bar{\lambda})s}.$$

Weil nach (12) $c_k < \frac{R_{k,q}}{2(k+1)}$ ist, so nehmen wir die folgende Abschätzung als die allgemeine:

$$T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant Cm^{(k-1-c_k)s + \lambda s - \lambda_0 s}, \tag{$6_2$}$$

wo:

$$\lambda_0 = \min\left(\frac{\lambda}{4}, \frac{R_{k,q}}{2K} - c_k\right).$$

Es bleibt den Fall zu untersuchen, wenn:

$$m \leqslant q \leqslant m^{1+\omega_0}$$

st.

Die Bedingung (13) kann die Lösungen von folgender Art besitzen:

$$\sum_{j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_{k-2}}^{(k-2)}(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(k-2)}) h_{j_{k-1}}^{(k-1)} = q\eta_i;\ y_i = l\eta_i;\ |\eta_i| \leqslant \frac{m^{1+\omega_0}}{q};\ \ |h_{j_{k-1}}^{(k-1)}| \leqslant m; \tag{18}$$

$$(i, j_{k-1} = 1, 2, \ldots s).$$

Wir untersuchen die Lösungen von (14). Sei der Rang der Matrix

$$\| a_{ij_{k-1}}^{(k-2)}(\xi^{(1)}, \ldots \xi^{(k-2)}) \|$$

gleich $r_0$. Dann bildet die Menge der ganzen Punkte in (14) eine Menge von $s-r$ Dimensionen, wo $r \geqslant r_0$ ist. In der Menge der ganzen Punkte in (13) bleiben noch $r-l$ Richtungen, die von dem Lineal (14) unabhängig sind und die in (18) im Raume $(h^{(k-1)}, \eta)$ ganze Punkte bilden, deren Projektion auf den Raum $(\eta)$, parallel dem $s$-Lineal (18) ausgeführt, dort (in $(\eta)$) einen nicht degenerierenden $(r-l)$ — dimensionalen Parallelotop aufspannen. Das auf diesem Parallelotop gebaute Gitter besitzt nicht mehr als $m^{\omega_0(r-l)}$ Punkte und also besitzt (18) nicht mehr als:

$$Cm^{s-r+\omega_0(r-l)}$$

Lösungen. Wir sehen, dass das schlimmste, was geschehen kann, im Vergleich mit den Abschätzungen des ersten Falles ist, dass in der Formel (17) im Exponent noch das Glied

$$\omega_0 (r - l) \leqslant \omega_0 s \leqslant \frac{s R_{k,q}}{(2K)^2}$$

auftritt. (In Wirklichkeit wird hier der Exponent der rechten Seite der Formel, die der Formel (17) entspricht, viel kleiner als in (17).) Aber die Grösse: $c_k - \overline{\lambda}$ ist kleiner nicht nur als $\frac{R_{k,q}}{2(k+1)}$, sondern auch als die Grösse

$$R_{k,q}\left[\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{(2K)^2}\right]$$

und also die Formel $(6_2)$ gilt auch in dem zweiten Fall. Sei $T_\lambda$ die Anzahl aller Punkte, die der Bedingung (2) § 2 genügen. Diese Anzahl übersteigt die Summe aller $T_\lambda^{(0,1)}(G)$ (über alle $G$) nicht. Wir haben also für $T_\lambda$ die Abschätzung:

$$T_\lambda \leqslant C T_\lambda^{(0,1)}(G) \leqslant C m^{\left[k-1-\frac{R_{k,q}}{[2(K+1)]^k}\right]s+\lambda s-\lambda_0 s}. \tag{19}$$

## § 10. Die Abschätzung der mehrfachen Gausschen Summe S.

Die Formel (19) § 9 benutzend, können wir die Summen $S_k(1)$ § 2 abschätzen. Wir schneiden den Würfel $\Lambda$:

$$0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1 \qquad (i = 1, 2 \ldots s)$$

in kleine Würfel durch die Schneidung jeder der $s$ Kanten des Würfels in $D$ gleiche Stücke. Die Kante eines jeden solches kleinen Würfels ist also gleich $\frac{1}{D}$. Wir bezeichnen die Grössen:

$$l \sum_{j_1 \ldots j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_1 \ldots j_{k-1}} h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-1}}^{(k-1)} - q y_i = B_i, \qquad (i = 1, 2 \ldots s)$$

wo die Zahlen $y_i$ so gewählt sind, dass die Grössen $B_i$ die absolut kleinsten Reste in Bezug auf den Modul $q$ der Grössen

$$l \sum_{j_1 \ldots j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_1 \ldots j_{k-1}} h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-1}}^{(k-1)} \qquad (i = 1, 2 \ldots s)$$

sind und also im Würfel $\mathfrak{B}$:

$$-\frac{q}{2} < B_i \leqslant \frac{q}{2} \qquad (i = 1, 2 \ldots s)$$

liegen. Mit Hilfe der Eckpunkte der Schneidung von $\Lambda$, können wir auch den Würfel $\mathfrak{B}$ einer Schneidung unterwerfen. Sei: $\lambda_i = \frac{\mu_i}{D}$.

Wir bilden einen Sternstück:

$$\frac{q}{2m^{1-\frac{\mu_i-1}{D}}} \leqslant \varepsilon_i B_i \leqslant \frac{q}{2m^{1-\frac{\mu_i}{D}}}, \quad \text{wenn} \quad \mu_i \geqslant 1 \text{ ist.}$$

$$0 \leqslant \varepsilon_i B_i \leqslant \frac{q}{2m}, \quad \text{wenn} \quad \mu_i = 0 \text{ ist.}$$

Da sind $(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s)$ beliebige Kombinationen von $\pm 1$. Wir bekommen also

$$2^n \cdot (D+1)^n$$

Zellen, in die $\mathfrak{B}$ geschnitten wird. Wir verteilen die Summe $S_k$ in $2^n(D+1)^n$ Teilsummen:

$$S_k(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_s; \mu_1 \ldots \mu_s) = S_k(\varepsilon; \mu),$$

je nachdem in welche Zelle von $\mathfrak{B}$ die Werte der absolut kleinen Reste der Grössen:

$$l \sum_{j_1 \ldots j_{k-1}=1}^{s} a_{ij_1 \ldots j_{k-1}} h_{j_1}^{(1)} \ldots h_{j_{k-1}}^{(k-1)} \qquad (i = 1, 2 \ldots s)$$

nach dem Modul $q$ treffen.

Der Wert von $S_k(\varepsilon; \mu)$ ist kleiner als:

$$\left(\prod_{i=1}^{s} 2m^{1-\frac{\mu_i-1}{D}}\right) \cdot T_\lambda \leqslant$$

$$\leqslant Cm^{s+\frac{s}{D}-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_s)} \cdot m^{(k-1)s-\frac{R_{k,q}}{[2(k+1)]^k}s+\lambda s-\lambda_0 s} \leqslant Cm^{ks-\frac{R_{k,q}}{[2(k+1)]^k}s}.$$

Nach allen $(\varepsilon)$ und $(\mu)$ summierend, bekommen wir schliesslich:

$$S_k \leqslant Cm^{ks-\frac{R_{k,q}}{[2(k+1)]^k}\cdot s}.$$

Also ist (siehe § 1 (6)):

$$|S|^{2^{k-1}} \leqslant Cm^{2^{k-1}\cdot s-\frac{R_{k,q}}{[2(k+1)]^k}\cdot s}$$

oder:

$$(1) \qquad \boxed{|S| \leqslant Cm^{s-\frac{R_{k,q}}{[4(k+1)]^k}\cdot s}, \quad \text{wo:} \quad R_{k,q} = \min\left(1, \frac{1}{2}[k-(n+\alpha)]\right) \text{ ist.}}$$

Diese Formel ist das Schlussresultat der ersten Mitteilung.

### § 11. Die Abschätzung der mehrfachen kubischen Gausschen Summe

Die Formel (1) § 10 war durch Abschätzungen, in denen der Einfachkeit halber grosse und wichtige Glieder weggelassen werden, bekommen.

Für $k=3$ habe ich die Methode sorgfältiger durchgeführt und habe dadurch für $|S|$ die folgende Abschätzung bekommen:

$$|S| \leqslant Cm^{\left[1-\frac{3-(n+\alpha)}{4(7+4\alpha)}\right]s} \tag{1}$$

statt der Abschätzung:

$$|S| \leqslant Cm^{\left[1-\frac{3-(n+\alpha)}{4096}\right]s}.$$

Die Vergleichung dieser zwei Formeln zeigt, dass die Formel (1) § 10 nicht die Grenze der Präzision, der in dieser Arbeit entwickelten Methode, darstellt.

Wir wollen hier den Beweis der Formel (1) skizzenweise anweisen. Der Typus wird durch die Zahlen $(\sigma_1, \tau_1, \beta_1) = (\sigma, \tau, \beta)$ charakterisiert. Man wählt weiter die Zahl $\varkappa_1 = \varkappa \leqslant \tau$ und bekommt den Fundamentalpunkt-Fundamentalkette-Fundamentalsystem $(\xi)$. Sei $\bar{\varkappa} \geqslant \varkappa$ die Nummer der Mannigfaltigkeit $\Gamma_{\bar{\varkappa}}$ die den Punkt $(\xi)$ enthält. Wir fügen beide Zahlen $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$ zur Charakteristik des Typus hinzu: $(\sigma, \tau, \beta, \varkappa, \bar{\varkappa})$. Wir wollen eine Typussammlung $(\sigma, \tau)$ bilden, die aus Typen besteht, bei denen $\sigma$ und $\tau$ fixierte Werte besitzen. Sei $T_\lambda(\sigma, \tau)$ die Anzahl der Punkte, die zu $(\sigma, \tau)$ gehören. Dann ist:

$$T_\lambda(\sigma, \tau) \leqslant \sum_{\beta=\beta_1}^{\beta_2} m^\beta \cdot U_\lambda(\sigma, \tau, \beta). \tag{2}$$

Da ist $U_\lambda(\sigma, \tau, \beta)$ die Anzahl solcher Wertsysteme $(h^{(2)})$, für die der Parallelotop:

$$\left| l \sum_{j_1 j_2 = 1}^{s} a_{ij_1 j_2} x_{j_1}^{(1)} h_{j_2}^{(2)} - q y_i \right| \leqslant \bar{p}_i; \quad |x_{j_1}^{(1)}| \leqslant m; \qquad (ij_1 = 1, 2 \ldots s)$$

die Charakteristik $\beta$ besitzt (das ist, dass die Anzahl der ganzen Punkte im Parallelotop zwischen $m^{\beta - \frac{1}{\nu}}$ und $m^\beta$ liegt). $\beta_2$ ist der grösste für $\beta$ mögliche Wert, nämlich $2\tau - \sigma + \alpha s$ und $\beta_1$ der kleinste mögliche Wert, nämlich $\frac{1}{\nu}$.

Wir betrachten die Summe rechts in (2) als eine Summe der Glieder von der Form $m^\beta$. Dann ist $U_\lambda(\sigma, \tau, \beta)$ die Anzahl des Auftreten des Summanden $m^\beta$ in der Summe. Wenn wir einen Summanden $m^{\beta'}$ durch einen Summanden $m^{\beta''}$, wo $\beta'' > \beta'$ ist, ersetzen, so wird die Summe nur vergrössert. Dies kann auf folgendem Wege ausgeführt sein. Sei:

$$U_\lambda(\sigma, \tau) = \sum_{\beta=\beta_1}^{\beta_2} U_\lambda(\sigma, \tau, \beta).$$

Wir ersetzen $U_\lambda(\sigma, \tau, \beta)$ durch

$$\overline{U}_\lambda(\sigma, \tau, \beta) > U_\lambda(\sigma, \tau, \beta),$$

beginnen aber die Summation über $\beta$ in (2) nicht von $\beta_1$, sondern von einer Zahl $\beta_0 > \beta_1$ aber einer solchen, dass:

$$\sum_{\beta=\beta_0}^{\beta_2} \overline{U}_\lambda(\sigma, \tau, \beta) \geqslant U_\lambda(\sigma, \tau). \tag{3}$$

Weil aber $U_\lambda(\sigma, \tau)$ die Anzahl aller möglichen Werte von $(h^{(2)})$ nämlich die Zahl $Cm^s$ nicht übersteigen kann, so ist die Bedingung (3) durch die Bedingung:

$$\sum_{\beta=\beta_0}^{\beta_2} \overline{U}_\lambda(\sigma, \tau, \beta) = Cm^s \tag{4}$$

ersetzbar.

Wenn wir unter $\overline{U}_\lambda(\sigma, \tau, \beta)$ die zu der Formel (16) § 9 analoge Abschätzung verstehen:

$$\overline{U}_\lambda(\sigma, \tau, \beta) = Cm^{\frac{\sigma-\beta}{\sigma-\varkappa}\cdot\bar{\varkappa}+s-\psi}, \tag{5}$$

wo $\psi = \max(\psi', \psi'')$

$$\psi' = \left(\frac{\beta-\varkappa}{\sigma-\varkappa} - \alpha\right)\bar{\varkappa} + \left(1 + \alpha - \frac{\beta-\varkappa}{\sigma-\varkappa}\right)\delta - \text{л}s;$$

$$\psi'' = \left(n - 1 + \frac{\beta-\varkappa}{\sigma-\varkappa}\right)\delta - \text{л}s,$$

wo

$$\text{л} = \max(\text{л}_{\sigma-\tau}) \leqslant \lambda$$

ist.

Die Bedingung (4) und Formel (5) geben uns also die Möglichkeit die untere Grenze der, wie höher angewiesen, umformten Summe (2) zu definieren.* Es ist leicht einzusehen, dass der Exponent des allgemeines Gliedes:

$$m^\beta\,\overline{U}_\lambda(\sigma, \tau, \beta) = m^{\frac{\sigma-\beta}{\sigma-\varkappa}\cdot\bar{\varkappa}+s+\beta-\psi}$$

* Dazu dient die wichtige Gleichung:

$$\frac{\sigma-\beta_0}{\sigma-\varkappa}\cdot\bar{\varkappa} + s - \psi = s \tag{6}$$

wo die Grösse $\psi$ eine Funktion von $\beta_0$ ist).

der umwandelten Summe (2) die Grösse $\beta$ mit einem negativen Koeffizient enthält, weshalb man für die obere Grenze von $T_\lambda(\sigma, r)$ die Grösse:

$$Cm^{1+\beta_0} \tag{6}$$

wählen kann. Die Gleichung (6) gibt uns nach einer kurzen Analyse den Wert von $\beta_0$, der uns zur Formel (1) führt.

Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik
der Universität in Leningrad.

## В. А. ТАРТАКОВСКИЙ. ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЗАКОНАХ В ОБЩЕМ ДИОФАНТОВОМ АНАЛИЗЕ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

### РЕЗЮМЕ

Настоящая работа есть первое сообщение об асимптотических законах «общего» Диофантова анализа, посвященное оценке многократных Гауссовых сумм.

Пусть $S$ есть многократная Гауссова сумма:

$$S = \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{h_\lambda=-m}^{+m} l^{2\pi i \frac{l}{q} F(h_1, h_2, \ldots h_s)},$$

где $F(h_1, h_2, \ldots h_s)$ есть «общая» форма или полином $k$-той степени. $l$ и $q$ взаимно простые числа, а $m \leqslant q < m^{k-1+\alpha}$, где $\alpha$ любая фиксированная положительная дробь. В настоящей статье устанавливается следующая оценка модуля суммы $S$:

$$|S| \leqslant Cm^{s - \frac{R_{k,q}}{[4(k+1)]^k} \cdot s}, \quad \text{где} \quad R_{k,q} = \min\left(1, \frac{1}{2}[k-(n+\alpha)]\right). \tag{1}$$

Кроме того, в статье указывается на один метод, не использованный при выводе формулы (1), но дающий возможность улучшить оценку. При применении этого метода к Гауссовым суммам в случае $k = 3$ получается оценка значительно лучшая, чем (1), а именно:

$$k = 3; \quad |S| \leqslant Cm^{\left[1 - \frac{3-(n+\alpha)}{4(7+4\alpha)}\right] s}, \tag{2}$$

где $n + \alpha$ имеет следующий смысл:

$$q = m^{n+\alpha}; \; (1 \leqslant n + \alpha < 3).$$

Научно-исследовательский институт
математики и механики при
Ленинградском гос. университете.

---

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# SUR LA STABILITÉ DE CERTAINES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DANS LE PROBLÈME DU MOUVEMENT DANS UN MILIEU RÉSISTANT

Par G. DOUBOSHINE

(*Presenté par* A. Krylov, *membre de l'Académie*)

## Introduction

Nous avons donné, dans un mémoire précédent,* l'essai d'une analyse qualitative de la forme des trajectoires d'un point matériel, se mouvant dans le champ d'attraction Newtonienne d'un corps central quelconque, environné d'un milieu cosmique résistant.

En admettant que le milieu ne possède pas de mouvement propre et qu'il n'exerce aucune action gravitante sur le point mobile, nous sommes arrivés à la conclusion que la trajectoire ne peut se rapporter qu'à l'un des deux types suivants: au premier type appartiendront les trajectoires, aboutissant au corps central (les trajectoires de chute); au second les trajectoires s'éloignant à l'infini.

Ces résultats sont également valables pour toute loi de résistance, pourvu qu'elle satisfasse à quelques conditions générales de l'existence des intégrales uniformes du système des équations différentielles auquel amène la solution du problème.

Ainsi, dans les hypothèses d'un milieu immobile et non gravitant, il n'existe dans le problème étudié ni trajectoires périodiques ni trajectoires asymptotiques, ni aucune autre espèce de trajectoire, disposée dans la région finie de l'espace et n'aboutissant pas à des points singuliers.

Cependant il est clair *à priori*, que nous pouvons obtenir les trajectoires appartenant à l'un des types indiqués, si nous introduisons des hypothèses plus générales par rapport à la structure et au mouvement du milieu et si, de cette manière, nous considérons des schèmes plus généraux et se rapprochant davantage de la réalité.

* «Sur le mouvement dans un milieu résistant», et «Об одном частном случае движения в сопротивляющейся среде». Astronomical Journal, t. IX, fasc. 1—2, 1932. Voir aussi ibidem: В. В. Степанов. К теории движения материальной точки в сопротивляющейся среде.

L'étude qui suit est un essai d'application de l'analyse qualitative aux plus simples parmi ces schèmes généraux et forme la suite naturelle des recherches, poursuivies déjà plusieurs années dans la Section de Cosmogonie et de Mécanique Céleste de l'Institut Astronomique de Moscou.

Le sujet de cette étude est la recherche de certaines solutions particulières périodiques du problème envisagé et l'analyse qualitative de la stabilité de ces solutions au sens de Liapounoff. Posées les admissions, qui caracterisent le schéma consideré et qui seront exposées dans la suite au détail, le problème admet une série de solutions circulaires, correspondant à certains systèmes déterminés des conditions initiales. En examinant les solutions, correspondant à des conditions initiales assez rapprochées des conditions initiales qui déterminent les solutions circulaires, nous avons trouvé que dans certains cas que ces solutions restent toujours assez voisines aux solutions circulaires considerées, et même qu'elles s'en rapprochent asymptotiquement avec l'accroissement du temps. Au contraire, dans d'autres cas les solutions, voisines des solutions circulaires par les conditions initiales ne le restent pas avec l'accroissement du temps. Dans le premier cas nous dirons avec A. Liapounoff, que la solution circulaire donnée est stable, dans le second cas nous dirons que la solution circulaire est instable.

Le lecteur trouvera une définition générale de la stabilité de la solution particulière donnée dans le Mémoire classique de A. M. Liapounoff: «Problème général de la stabilité du mouvement».* Notre étude représente une application immédiate des méthodes générales et des théorèmes de l'illustre savant à un problème d'une grande importance pour la mécanique céleste actuelle. Le schèma envisagé dans notre travail est determiné par les hypothèses suivantes:

Soit un corps quelconque, que nous considérons comme un point matériel ou comme une sphère homogène ou composée de couches concentriques homogènes mais de densité différente. Admettons que ce corps, que nous nommerons corps principal, est environné d'un certain milieu cosmique, que nous nommerons atmosphère du corps principal. Supposons que cette atmosphère occupe un domaine fini de l'espace, qu'elle représente une couche sphérique dont le centre coïncide avec le centre du corps principal, qu'elle possède une structure déterminée et qu'elle tourne autour d'un certain axe invariable passant par le centre du corps principal. Désignons par $\mu(r)$ et $n(r)$ la densité et la vitesse angulaire de la rotation de l'atmosphère à la distance $r$ du centre de corps principal. Considérons ces deux fonctions comme des fonctions continues et analytiques de $r$. Elles déterminent la structure de l'atmosphère et son mouvement.

* А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892. Voir la traduction française: Problème général de la stabilité du mouvement. Annales de la Faculté des Sciences de l'université de Toulouse. 2-me série. Tome IX. 1907. Voir aussi: H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1892, T. 1. Ch. IV et VII; E. Goursat. Cours d'analyse mathématique, T. III, ch. XXIII; E. Picard. Traité d'analyse. T. III, ch. VIII.

Les hypotèses énoncées permettent de considérer l'atmosphère comme étant, pour ainsi dire, stratifiée et composée d'un nombre infini de couches sphériques concentriques d'une épaisseur infinitésimale. La densité de chaque couche séparée peut être considerée comme constante, mais cette densité varie d'une couche à l'autre selon une loi déterminée. Chacune de ces couches attire le point matériel qui se trouve en dehors d'elle comme si toute la masse était concentrée dans son centre et chacune d'elle tourne avec une vitesse angulaire constante autour du même axe, comme un corps solide. Mais outre une action gravitante, l'atmosphère exerce encore sur le point, qui se meut à son intérieur, une action retardante, déterminée par la force de résistance $F$.

Admettons que cette force de résistance dépend d'une manière arbitraire de la densité $\mu$ de l'atmosphère et de la vitesse relative $\overline{V}$ du point mobile et que l'expression analytique de cette dépendance puisse être écrite de la manière suivante:

$$F=\lambda' \overline{V} \cdot \Phi(\mu, \overline{V}^2),$$

où $\lambda'$ est le coefficient de la viscosité et $\Phi(\mu, \overline{V}^2)$ la fonction analytique de ses variables. Plus bas nous imposerons à la fonction $\Phi$ encore une autre restriction, à savoir: nous exigerons qu'elle ne devienne pas nulle pour $\overline{V}=0$. De cette manière nous laissons du coté les cas suivants: 1) le cas où $\Phi$ étant une fonction analytique de $\overline{V}^2$, dévient nul avec $\overline{V}$ et 2) le cas, où $\Phi$ est une fonction analytique arbitraire de la vitesse $\overline{V}$ elle-même, et non seulement de son carré.

Les difficultés qui ne permettent pas d'aborder l'étude du premier de ces deux cas dépendent de ce que toutes les racines de l'équation caractéristique du système aux variations ont des parties réeles nulles et qu'il n'existe pas encore de méthode pour la résolution des problèmes de ce genre.

Les difficultés qui ressortent du second de deux cas indiqués ont un tout autre caractère et s'expliquent par le fait que dans ce cas les parties droites des équations différentielles, auquelles amène l'examen de la question, ne sont pas des fonctions holomorphes de leurs variables et, par conséquent, les méthodes de Liapounoff ne sont pas appliquables.

Néanmoins ces deux cas présentent un grand intérêt autant du point de vue des applications que du point de vue de la mathématique pure. Nous leur accordons présentement une grande attention et nous espérons d'achever ce travail difficile et de mener ainsi à bonne fin une recherche dont les parties plus faciles sont déjà terminées. Notons encore que le schéma considéré peut être généralisé dans un autre sens, à savoir: par rapport à la structure de l'atmosphère si on remplace la distribution sphérique des densités par une autre, par exemple, par une distribution ellipsoidale.

### 1. Équations différentielles du mouvement

Formons maintenant les équations différentielles du mouvement du point matériel se mouvant dans l'atmosphère du corps principal. Prenons pour cela un système rectangulaire Cartésien quelconque de coordonnées ayant leur origine dans le centre du corps principal et avec des directions invariables des axes.

Choisissons pour l'axe de $z$ l'axe de rotation de l'atmosphère et choisissons les axes $x$ et $y$ dans le plan de l'équateur de manière que le trièdre $Oxyz$ forme un système droit.

Prenons la masse du corps principal pour l'unité des masses, la distance du centre du corps principal jusqu'à la borde extèrieure de l'atmosphère pour l'unité des distances et choisissons l'unité de temps de telle sorte que la constante d'attraction soit de même égale à l'unité.

Alors, le point materiel de la masse $m$, se mouvant dans l'atmosphère subit l'action des forces suivantes:

1) La force d'attraction du corps principal

$$= -\frac{m}{r^2},$$

2) La force d'attraction de l'atmosphère

$$= -\frac{mM(r)}{r^2},$$

ou $M(r)$ désigne la masse de l'atmosphère comprise dans la sphère du rayon $r$.

3) La force de résistance

$$= -\lambda m \overline{V} \Phi(\mu, \overline{V}^2),$$

ou $\lambda$ représent le coefficient de la viscosité, divisé par la masse $m$ du point mobile.

Les deux premières forces sont dirigées le long du rayon-vecteur du point $m$ vers le centre du corps principal, et la dernière suivant la tangente à la trajectoire dans la direction opposée au mouvement.

Admettons, pour fixer les idées, que l'atmosphère tourne dans le sens positif c'est à dire de la partie positive de l'axe $x$ versl la partie positive de l'axe $y$.

Alors les projections de la vitesse de rotation sur les axes $x$, $y$, $z$ seront respectivement égales à

$$-n(r)\cdot y, \quad +n(r)\cdot x, \quad 0$$

Les composants de la vitesse relative $\overline{V}$ seront donc égaux à

$$\frac{dx}{dt}+n(r)\cdot y, \quad \frac{dy}{dt}-n(r)\cdot x, \quad \frac{dz}{dt}.$$

Les équations différentielles du mouvement s'écriront:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{1 + M(r)}{r^3} x + \lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)\left[\dfrac{dx}{dt} + n(r)\cdot y\right] = 0, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} + \dfrac{1 + M(r)}{r^3} y + \lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)\left[\dfrac{dy}{dt} - n(r)\cdot x\right] = 0, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} + \dfrac{1 + M(r)}{r^3} z + \lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)\dfrac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

où

$$(2) \qquad \overline{V}^2 = \left[\frac{dx}{dt} + n(r)\cdot y\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt} - n(r)\cdot x\right]^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

et la masse $M(r)$ est determinée par la formule

$$(3) \qquad M(r) = 4\pi \int_{\varepsilon}^{r} r^2 \mu(r)\, dr$$

où $\varepsilon$ est le rayon du corps principal.

On voit aisément que le système (1) a $\infty^1$ de solutions particulières périodiques, déterminées par les équations

$$x = a\cos[n(a)\cdot t + \omega_0], \quad y = a\sin[n(a)\cdot t + \omega_0], \quad z = 0,$$

où $\omega_0$ est la constante arbitraire, et $a$ — la racine de l'équation

$$(4) \qquad n^2(r) = \frac{1 + M(r)}{r^3},$$

comprise dans l'intervalle $(\varepsilon, 1)$.

Les solutions particulieres considerées déterminent les mouvements circulaires du point matériel avec une vitesse angulaire constante égale à la vitesse angulaire de la rotation de l'atmosphère pour la distance $a$ du centre du corps principal.

L'équation (4) montre que le mouvement circulaire n'est pas possible pour toute distance du centre du corps principal; il n'est possible que pour une distance où le mouvement de rotation des particules de l'atmosphère est régi par la loi de Kepler.

Si la distribution des vitesses angulaires de la rotation de l'atmosphère est arbitraire, l'équation (4) admet en général un nombre fini de racines dans l'intervalle $(\varepsilon, 1)$ et nous avons pour chaque valeur de $\omega_0$ un nombre fini de solutions particulières périodiques. Il est même possible que l'équation (4) n'aie aucune racine dans l'intérvalle $(\varepsilon, 1)$ et dans ce cas le problème envisagé n'aura pas de solutions périodiques. Ceci aura lieu, par exemple, dans le cas, où la fonction $n(r)$ soit inférieure à l'unité dans l'intérvalle $(\varepsilon, 1)$ car l'équation (4) montre que pour $r < 1$ doit être

$n(r) > 1$. Mais l'équation (4) peut également être satisfaite identiquement. Ceci aura lieu dans le cas, où la distribution des vitesses angulaires de la rotation de l'atmosphère est régie par la loi de Kepler, c'est à dire dans le cas où chaque particule de l'atmosphère est comprise dans un mouvement de rotation régi par cette loi. Alors, toute valeure de $a$ dans l'intérvalle $(\varepsilon, 1)$ sera une racine de l'équation (4) et le système (1), pour toute valeur fixée de $\omega_0$, aura un nombre infini de solutions périodiques, dépendant d'un paramètre arbitraire.

L'existence d'une atmosphère, dont toutes les particules soient comprises dans un movement de rotation régi par la loi de Kepler autour d'un axe invariable est évidemment peu probable, mais nous pouvons écarter cette difficulté en admettant, que cette propriété n'appartient qu'à celles parmi les particules de l'atmosphère qui forment une couche équatoriale suffisamment mince. Nous pouvons même supposer, que l'atmosphère n'est constituée que d'une seule couche, et qu'elle forme autour du corps principal un mince nuage en forme de disque. Il est claire que dans ce dernier cas la masse $M(r)$ sera déterminée par une autre formule, à savoir:

$$M(r) = 2\pi h \int_{\varepsilon}^{r} r\mu(r)\,dr,$$

où $h$ désigne l'épaisseur de la couche équatoriale en forme de disque.

Le sujet de notre mémoire est l'étude de la stabilité des solutions périodiques indiquées.

Pour résoudre ce problème il est commode de transformer le système (1) à d'autres variables, en introduisant au lieu des coordonnées rectangulaires $x$, $y$, $z$ les coordonnées cylindriques $\rho$, $\omega$, $z$ à l'aide des formules:

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega, \quad z = z.$$

Il est évident que $\rho$ est la projection du rayon-vecteur $r$ sur le plan de l'équateur de l'atmosphère, et $\omega$ l'angle formé par cette projection et la direction positive de l'axe $x$. Il est facile de voir que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Pour déduire les équations déterminant les nouvelles coordonnées, le plus simple est de procéder de la manière suivante:

Multiplions d'abord la premiére et la seconde des équations (1) respectivement par $x$ et $y$ et faisons ensuite l'addition.

Nous obtenons:

$$(5) \qquad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1 + M(r)}{r^3}\rho^2 + \lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

mais

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=\rho\frac{d\rho}{dt};\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2,$$

de plus

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{d\rho}{dt}\right)-\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2-\rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2=\rho\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

A l'aide de ces expressions l'équation (5) s'écrira

$$\rho\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+\frac{1+M(r)}{r^3}\rho^2+\lambda\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)\,\rho\frac{d\rho}{dt}=0.$$

Ceci est la première équation cherchée.

Pour obtenir la seconde équation entre les fonctions cherchées $\rho$, $\omega$, $z$, multiplions la première des équations (1) par $-y$, la seconde par $+x$ et additionnons. Nous obtenons:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)\left[x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right]-\lambda\rho^2 n(r)\,\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)=0.$$

Comme

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=\rho^2\frac{d\omega}{dt},$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\omega}{dt}\right)$$

l'équation précedente prendra la forme:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\omega}{dt}\right)+\lambda\rho^2\frac{d\omega}{dt}\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)-\lambda\rho^2 n(r)\,\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)=0.$$

Ceci est la seconde équation cherchée.

La troisième équation entre les variables $\rho$, $\omega$, $z$ sera évidemment la troisième équation du système (1).

Ainsi au lieu du système (1) nous aurons le système équivalent suivant:

$$(6)\qquad\begin{cases}\dfrac{d^2\rho}{dt^2}+\lambda\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)\dfrac{d\rho}{dt}+\dfrac{1+M(r)}{r^3}\rho-\rho\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2=0,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dfrac{d\omega}{dt}\right)+\lambda\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)\,\rho^2\dfrac{d\omega}{dt}-\lambda\rho^2 n(r)\,\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)=0,\\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2}+\lambda\Phi(\mu,\ \overline{V}^2)\dfrac{dz}{dt}+\dfrac{1+M(r)}{r^3}z=0.\end{cases}$$

La vitesse $\overline{V}$ comme fonction des variables nouvelles est déterminée par la formule

$$\overline{V}^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \rho^2 n^2(r) - 2n(r)\rho^2\frac{d\omega}{dt}. \tag{7}$$

Le système (6), comme il est aisé de vérifier, admet la solution particulère

$$\rho = a, \quad \omega = n(a)t + \omega_0, \quad z = 0,$$

qui est identique avec la solution du système (1).

Le système (6) est, comme le système (1), un système du 6-me ordre, mais nous pouvons abaisser l'ordre du système en remplacant la variable $\omega$ par une nouvelle variable, à savoir: la projection de la vitesse angulaire du mouvement du point sur le plan $xOy$, c'est à dire $\frac{d\omega}{dt}$. Mais nous simplifierons encore d'avantage le système (6) si nous introduisons comme variable nouvelle la double projection de la vitesse sectoriale du mouvement du point sur le plan $xOy$. En désignant cette quantité par $\Omega$ nous avons

$$\Omega = \rho^2\frac{d\omega}{dt}. \tag{8}$$

Si nous définissons les variables $\rho$, $\Omega$ et $z$ en fonction du temps, la longitude $\omega$ sera déterminée de la relation (8) par une simple quadrature

$$\omega = \int_{t_0}^{t}\frac{\Omega}{\rho^2}\,dt + \omega_0,$$

où $\omega_0$ — est une constante arbitraire.

En introduisant pour simplifier la notation

$$P(r) = \frac{1 + M(r)}{r^3}$$

nous écrirons le système transformé sous la forme suivante:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2} + \lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)\frac{d\rho}{dt} + P(r)\cdot\rho - \frac{\Omega^2}{\rho^3} = 0, \\ &\frac{d\Omega}{dt} + \lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)[\Omega - \rho^2 n(r)] = 0, \\ &\frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)\frac{dz}{dt} + P(r)\cdot z = 0. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Le système (9) est un système de 5-me ordre.

Il est aisé de voir qu'il a la même solution particulière, que le système (1). Avec les variables nouvelles cette solution s'écrira

(10) $$\rho = a, \quad \Omega = a^2 n(a), \quad z = 0,$$

où $a$ est la racine de l'équation

(11) $$n^2(r) = P(r).$$

La solution (10) est déterminée par les conditions initiales suivantes:

(12) $$\rho_0 = a, \quad \rho_0{}' = 0, \quad \Omega_0 = a^2 n(a), \quad z_0 = 0, \quad z_0{}' = 0.$$

Considèrons maintenant une solution quelconque du système (9) déterminée par le système des valeurs initiales, voisines des valeurs initiales (12).
Soit ces conditions initiales

(13) $$\rho_0 = a + x_1^0, \quad \rho_0{}' = x_2^0, \quad \Omega = a^2 n(a) + x_3^0, \quad z_0 = x_4^0, \quad z_0{}' = x_5^0,$$

où $x_1^0$, $x_2^0$, $x_3^0$, $x_4^0$, $x_5^0$ sont des nombres réels, satisfaisant les inégalités

(14) $$|x_i^0| < H, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

et $H$ un nombre positif suffisamment petit.

Suivant A. Liapounoff, nous dirons que les $x_i^0$ sont des perturbations. Le but que nous nous proposons est d'établir le caractère et l'allure des solutions du système (9) pour lesquelles la valeur absolue des perturbations est suffisamment petite. Posons que dans le moment $t$ la solution considerée soit déterminée par les formules

(15) $$\rho = a + x_1, \quad \rho' = x_2, \quad \Omega = a^2 n(a) + x_3, \quad z = x_4, \quad z' = x_5,$$

et que

$$x_i(t_0) = x_i^0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Si à tout nombre positif $\varepsilon < H$ correspond un autre nombre positif $\eta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, tel que les inégalités

$$|x_i^0| < \eta \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

entraîneront forcément les inégalités

$$|x_i(t)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

vraies pour toute valeur de $t$ superieure à $t_0$, nous dirons suivant A. Liapunoff, que la solution (10) est s t a b l e (dans le sens positif). Si, $\varepsilon$ étant choisi, on ne peut pas trouver le nombre $\eta$ du genre indiqué, nous dirons que la solution (10) est i n s t a b l e. Si la solution (10) est stable est si de plus

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

nous dirons que la solution (10) est stable asymptotiquement (dans le sens positif). Enfin il se peut qu'on ne puisse pas trouver le nombre $\eta$ pour les valeurs arbitraires des perturbations, mais qu'un tel nombre puisse être trouvé si nous soumettons les quantités $x_i^0$ à une ou à plusieurs conditions de la forme:

$$\psi(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0) = 0.$$

Alors nous dirons que la solution (10) est stable conditionnellement. On sait que dans le cas d'une stabilité absolue, toute solution du système (9) pour laquelle les perturbations sont suffisamment petites restera toujours dans le voisinage de la solution (10).

Dans le cas d'une stabilité asymptotique toute solution du système (9) pour laquelle les perturbations sont assez petites, non seulement restera voisine de la solution (10), mais y tendra asymptotiquement pour $t \to +\infty$.

Mais si la solution (10) est instable, quelque petites que soient les perturbations il se trouvera toujours parmi les solutions (15) de telles qui sortiront forcement du voisinage de la solution (10). Enfin dans le cas de la stabilité conditionelle, nous pouvons affirmer que parmi les solutions (15) il se trouvera toujours des familles de solutions qui, les perturbations étant suffisamment petites, resteront toujours dans le voisinage de la solution (10).

Une telle famille dépendra de $s-j$ paramètres arbitraires, si les données initiales rélient les $j$ relations de la forme

$$\psi_k(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0) = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots, j)$$

Du point de vue de la mécanique les définitions énoncées plus haut sont équivalentes au fait que, si les coordonnées et les composantes de la vitesse de notre point matériel dans un certain moment du temps étaient assez voisines des quantités correspondantes dans le mouvement circulaire, la trajectoire du point, dans le cas de la stabilité, tournera indéfiniment autour d'un certain cercle ou même se rapprochera vers lui asymptotiquement pour $t \to +\infty$.

Au contraire, dans le cas d'une instabilité absolue la trajectoire quittera le voisinage de ce cercle et la destinée ulterieure de cette trajectoire restera inconnue.

Ainsi dans le cas de la stabilité (absolue ou conditionelle) il existe toujours des trajectoires voisines ou même asymptotiques aux trajectoires circulaires et la recherche et l'étude de ces trajectoires a une grande importance pour l'analyse du mouvement dans un milieu résistant.

## 2. Équations aux variations

Pour résoudre les questions, posées dans le paragraphe précédent il faut examiner les équations qui déterminent les fonctions $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, ou, selon la terminologie de A. Liapounoff, les équations du mouvement troublé.

Nous obtenons ces équations, en remplacant simplement les variables $\rho$, $\Omega$, $z$ par les variables $x_i$ moyennant les formules (15). Comme il est plus commode d'avoir un système d'équations du premier ordre, nous écrivons les équations qui déterminent le mouvement troublé sous la forme suivante:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)\cdot x_2 - P(r)(a+x_1) + \dfrac{[a^2 n(a) + x_3]^2}{(a+x_1)^3}, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -\lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)[a^2 n(a) + x_3 - (a+x_1)^2 n(r)], \\ \dfrac{dx_4}{dt} = x_5, \\ \dfrac{dx_5}{dt} = -\lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2) x_5 - P(r)\cdot x_4, \end{cases}$$

où

$$(2) \qquad r = \sqrt{(a+x_1)^2 + x_4^2}$$

et

$$(3) \qquad \overline{V}^2 = x_2^2 + x_5^2 + \frac{[a^2 n(a) + x_3]^2}{(a+x_1)^2} + (a+x_1)^2 n^2(r) - \\ -2[a^2 n(a) + x_3](a+x_1)^2 n(r).$$

En vertu des conditions énoncées dans l'introduction, les seconds membres des équations (1) seront des fonctions holomorhpes des variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, développables en séries entières suivant les puissances de ces quantités avec des coefficients constants. Il est aisé de vérifier, en outre, que ces développements ne contiennent pas de termes indépendants des quantités variables.

Écrivons, pour simplifier, le système (1) sous la forme

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ \dfrac{dx_3}{dt} = X_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ \dfrac{dx_4}{dt} = x_5, \\ \dfrac{dx_5}{dt} = X_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5). \end{cases}$$

La structure des fonctions $X_2$, $X_3$ et $X_5$ étant telle qu'il a été indiqué, le système (4) admet la solution triviale:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0 \tag{5}$$

et la résolution de notre problème nous amène ainsi à l'étude de la stabilité de cette solution triviale.

Après A. Liapounoff il est bien connue que dans certains cas la stabilité de la solution en question peut être complètement déterminée par l'examen des équations aux variations que nous obtenons en ne conservant dans les parties droites des équations (4) que les termes linéaires par rapport à $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$.

Formons maintenant ces équations aux variations.

Les ensembles des termes linéaires dans les expressions des fonctions $X_2$, $X_3$ et $X_5$ peuvent être écrites sous la forme

$$\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_1}\right)_0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_2}\right)_0 \cdot x_2 + \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_3}\right)_0 \cdot x_3 + \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_4}\right)_0 \cdot x_4 + \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_5}\right) x_5 \tag{6}$$

où $s = 2, 3, 5$ et l'indice 0 indique qu'il faut poser après les dérivations

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Vue des expressions pour $X_2$, $X_3$ et $X_5$ nous obtenons en dérivant:

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_1} x_2 - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2} \cdot \frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_1} x_2 - P(r) - P'(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}(a + x_1) - $$
$$- \frac{3\,[a^2 n(a) + x_3]^2}{(a + x_1)^4};$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = -\lambda\Phi - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2}\frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_2} \cdot x_3;$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_3} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2}\frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_3} x_2 + \frac{2\,[a^2 n(a) + x_3]}{(a + x_1)^3};$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_4} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_4} x_2 - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2}\frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_4} x_2 - P'(r)\frac{\partial r}{\partial x_4}(a + x_1);$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_5} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2}\frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_5} \cdot x_2;$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_1} = -\lambda \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2}\frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_1} \right\} [a^2 n(a) + x_3 + (a + x_1)^2 n(r)] +$$
$$+ \lambda\Phi \cdot \left[2(a + x_1) n(r) + (a + x_1)^2 n'(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}\right];$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_2} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2}\frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_2} [a^2 n(a) + x_3 - (a + x_1)^2 n(r)];$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_3} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2} \frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_3} [a^2 n(a) + x_3 - (a + x_1)^2 n(r)] - \lambda\Phi;$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_4} = -\lambda \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_4} + \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2} \frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_4} \right\} [a^2 n(a) + x_3 - (a + x_1)^2 n(r)] +$$

$$+ \lambda\Phi \cdot (a + x_1)^2 n'(r) \frac{\partial r}{\partial x_4};$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_5} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2} \frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_5} [a^2 n(a) + x_3 - (a + x_1)^2 n(r)];$$

$$\frac{\partial X_5}{\partial x_1} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdot x_5 - P'(r) \frac{\partial r}{\partial x_1} x_4;$$

$$\frac{\partial X_5}{\partial x_2} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2} \frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_2} \cdot x_5;$$

$$\frac{\partial X_5}{\partial x_3} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{V}^2} \frac{\partial \overline{V}^2}{\partial x_3} x_5;$$

$$\frac{\partial X_5}{\partial x_4} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} x_5 - P(r) - P'(r) \frac{\partial r}{\partial x_4} x_4;$$

$$\frac{\partial X_5}{\partial x_5} = -\lambda\Phi - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_5} x_5.$$

En posant dans ces expressions

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,$$

nous obtenons, comme il est aisé de vérifier:

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_0 = -P(a) - aP'(a) - 3n^2(a);$$

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_0 = -\lambda \overline{\Phi}(a);$$

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right)_0 = \frac{2n(a)}{a};$$

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_4}\right)_0 = \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_5}\right)_0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)_0 = \lambda \overline{\Phi}(a)[2an(a) + a^2 n'(a)];$$

$$\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)_0 = -\lambda \overline{\Phi}(a);$$

$$\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)_0 = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_4}\right)_0 = \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_5}\right)_0 = \left(\frac{\partial X_5}{\partial x_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial X_5}{\partial x_2}\right)_0 = \left(\frac{\partial X_5}{\partial x_3}\right)_0 = 0;$$

$$\left(\frac{\partial X_5}{\partial x_4}\right)_0 = -P(a);$$

$$\left(\frac{\partial X_5}{\partial x_5}\right)_0 = -\lambda \overline{\Phi}(a);$$

où

$$\overline{\Phi}(a) = \Phi[\mu(a), 0].$$

$a$ étant la racine de l'équation $n^2(r) = P(r)$, nous pouvons écrire

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_0 = -aP'(a) - 4P(a).$$

Mais

$$P(a) = \frac{1 + M(a)}{a^3}$$

donc

$$P'(a) = \frac{M'(a)}{a^3} - \frac{3P(a)}{a} = \frac{4\pi\mu(a) - 3P(a)}{a},$$

et par conséquent

$$\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) = -4\pi\mu(a) - P(a) = -4\pi\mu(a) - n^2(a)$$

est une quantité essentiellement négative. Désignons la par $-\overline{m}^2(a)$ et la quantité $a[2n(a) + an'(a)]$, pour simplifier, par $p(a)$.

Alors, les équations aux variations s'écrivent de la façon suivante:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\overline{m}^2 \cdot x_1 - \lambda\overline{\Phi} \cdot x_2 + \dfrac{2n}{a} \cdot x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \lambda\overline{\Phi}p \cdot x_1 - \lambda\overline{\Phi} \cdot x_3; \\ \dfrac{dx_4}{dt} = x_5; \\ \dfrac{dx_5}{dt} = -n^2 \cdot x_4 - \lambda\overline{\Phi} \cdot x_5.^* \end{cases}$$

La nature des intégrales de ce système dépend des racines de son équation caractéristique, qui s'écrira;

$$(8) \qquad D(k) = \begin{vmatrix} -k, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -\overline{m}^2, & -\lambda\overline{\Phi} - k, & \dfrac{2n}{a}, & 0, & 0 \\ \lambda\overline{\Phi}p, & 0, & -\lambda\overline{\Phi} - k, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -k, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -n^2, & -\lambda\overline{\Phi} - k \end{vmatrix} = 0$$

* Desormais, nous désignerons souvent les quantités $n(a)$, $p(a)$, $\overline{m}^2(a)$, $\overline{\Phi}(a)$, simplement par $n$, $p$, $\overline{m}^2$, $\overline{\Phi}$.

Il est aisé de voir que cette équation du 5-me degré se décompose en deux équations plus simples dont l'une est du 3-me et l'autre du 2-de degré. D'ailleurs on pouvait prévoir ce résultat d'avance, car les trois premières équations ne contiennent pas $x_4$ et $x_5$ et les deux dernières ne contiennent pas $x_1$, $x_2$, $x_3$. Ce fait simplifie d'avantage l'analyse du problème qui nous intéresse et cette analyse peut être accomplie par des moyens tout-à-fait élementaires.

Nous écrivons les équations indiquées comme suit:

$$D_1(k) = \begin{vmatrix} -k, & 1, & 0 \\ -\overline{m}^2, & -\lambda\overline{\Phi} - k, & \frac{2n}{a} \\ \lambda\overline{\Phi}p, & 0, & -\lambda\overline{\Phi} - k \end{vmatrix} = 0$$

$$D_2(k) = \begin{vmatrix} -k, & 1 \\ -n^2, & -\lambda\overline{\Phi} - k \end{vmatrix} = 0$$

ou bien

(10) $$D_1(k) = k^3 + 2\lambda\overline{\Phi}k^2 + (\lambda^2\overline{\Phi}^2 + \overline{m}^2)k + \lambda\overline{\Phi}q = 0,$$

où

$$q = 4\pi\mu - 3n^2 - 2ann',$$

et

(11) $$D_2(k) = k^2 + \lambda\overline{\Phi}k + n^2 = 0.$$

Nous avons déjà dit dans l'introduction qu'il nous faudrait imposer à la fonction de résistance $\Phi(\mu, \overline{V}^2)$ encore une restriction, à savoir que cette fonction ne devienne pas nulle pour $\overline{V} = 0$. La nécessité de cette restriction est maintenant claire.

En effet, si $\Phi(\mu, \overline{V}^2)$ devient nulle pour $\overline{V} = 0$, nous avons

$$\overline{\Phi}(a) = \overline{\Phi}[\mu(a), 0] = 0$$

et les équations (9) et (11) auront la forme

$$k^3 + \overline{m}^2 k = 0,$$

$$k^2 + n^2 = 0$$

d'où nous obtenons sans peine les valeurs de racines de l'équation caractéristique (8):

$$k_1 = 0, \; k_2 = \overline{m}i, \; k_3 = -\overline{m}i, \; k_4 = ni, \; k_5 = -ni. \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Ainsi dans ce cas toutes les racines de l'équation caractéristique du système aux variations auront des parties réelles nulles, et par coséquent ce cas doit être

exclu de nos considérations, car jusqu'à présent nous n'avons pas de méthode pour la résolution des problèmes de la stabilité, quand ils contiennent des faits de ce genre.

En supposant maintenant $\overline{\Phi} \neq 0$, envisageons d'abord l'équation plus simple (12). En le résolvant, nous obtenont

$$k = -\lambda\overline{\Phi} \pm \sqrt{\lambda^2\overline{\Phi}^2 - n^2}$$

d'où on voit immédiatement que les racines de l'équation (11) sont toutes les deux réelles et négatives, ou bien complexes conjuguées, avec des parties réelles négatives, ou enfin qu'elles coïncident en restant négatives.

Les théorèmes démontrés par A. Liapounoff dans son mémoire déjà cité établissent la stabilité absolue et asymptotique de la solution triviale du système (1) dans le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique du système aux variations possèdent des parties réelles négatives. Deux des cinq racines de l'équation (8) possédant déjà la propriété indiquée, il est évident que la question de la stabilité est déterminée par la structure des racines de l'équation cubique $D_1(k) = 0$.

La structure des racines de cette équation dépend avant tout de la valeur numérique du dernier membre. Ce membre n'étant pas nul l'équation n'aura pas de racines nulles et la question de la stabilité se résout par la considération des parties réelles des racines de l'équation $D_1(k) = 0$. Par conséquent, la stabilité peut être entièrement déterminée par les équations aux variations. Mais, si le dernier membre est nul, l'équation aura une racine nulle et alors il ne suffit pas de considérer les équations aux variations seulement, mais il faut encore ténir compte, dans les équations (1) où (4), des termes des ordres supérieurs. Ainsi il est nécessaire avant tout d'établir les cas dans lesquels le dernier membre de l'équation (9) peut être nul.

Etant donné que $\overline{\Phi} \neq 0$, le dernier membre ne peut devenir nul que dans le cas où $q = 0$.

Pour établir les cas où $q$ devient nul, considérons l'équation (11) du paragraphe précedent, que nous écrivons maintenant sous la forme:

$$Q(r) \equiv n^2(r) - \frac{1 + M(r)}{r^3} = 0. \tag{12}$$

Trouvons la dérivée de $Q(r)$, en considérant $r$ comme une variable indépendante. Nous avons:

$$Q'(r) \equiv \frac{1}{r}\left\{2rn(r)\,n'(r) - 4\pi\mu(r) + 3\,\frac{1 + M(r)}{r^3}\right\}. \tag{13}$$

Si $a$ est la racine de l'équation (12) nous avons

$$Q'(a) = \frac{1}{a}[2an(a)n'(a) - 4\pi\mu(a) - 3n^2(a)]$$

d'où en vertu de la formule (10) nous obtenons

$$q = -aQ'(a). \tag{14}$$

De la formule (14) nous voyons que $q$ devient nul simultanément avec $Q'(a)$. Mais la condition

$$Q'(a) = 0$$

exprime que la valeur considérée de $a$ est une racine multiple de l'équation (12). Au contraire, si $a$ est une racine simple de l'équation (12), $Q'(a)$, et par suite $q$, différera de zérò et l'équation caractéristique du système aux variations n'aura pas de racines nulles.

Ce qui est très important c'est encore le fait que dans le cas d'une distribution Keplérienne des vitesses angulaires de la rotation de l'atmosphère, $Q'(r)$, et par conséquent $q$ est nul identiquement et l'équation caractéristique aura forcément une racine nulle.

Il est intéressant de remarquer que $q$ n'est peut être identiquement nul que dans le cas d'une distribution Keplérienne des vitesses angulaires. En effet, en égalant $q$ à zérò nous obtenons l'équation

$$\frac{dn^2}{dr} + \frac{3n^2}{r} = \frac{4\pi\mu}{r},$$

qui peut être considérée comme une équation différentielle linéaire de premier ordre relativement à $n^2$. En résolvant cette équation nous obtenons

$$n^2(r) = \frac{C + M(r)}{r^3},$$

où $C$ est la constante arbitraire et $M(r) = 4\pi \int_{\varepsilon}^{r} r^2 \mu(r)\, dr$. Si $C = 1$, nous avons le cas de la distribution Keplérienne des vitesses angulaires de la rotation de l'atmosphère. Mais si $C \neq 1$ nous revenons au cas précédent, en choisissant conformement l'unité de la masse.

En passant maintenant à l'analyse de la stabilité de la solution triviale du système (1), nous considérons d'abord le cas où $q \neq 0$, et ensuite séparément le cas où $q = 0$.

### 3. Sur la stabilité des solutions périodiques dans le cas d'une distribution arbitraire des vitesses de la rotation de l'atmosphère

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, que la distribution des vitesses angulaires étant arbitraire, l'équation

$$(1) \qquad n^2(r) = \frac{1 + M(r)}{r^2},$$

n'admet, en général, qu'un nombre fini de solutions. Supposons que cette équation aie réellement des racines dans l'intervalle $(\varepsilon, 1)$ et admettons en outre que toutes ces racines soient des racines simples. Alors $q \neq 0$ et la question de la stabilité ne dépend que de la structure des racines de l'équation $D_1(k) = 0$. Examinons cette équation. Nous avons

$$(2) \qquad D_1(k) = k^3 + 2\lambda\overline{\Phi}k^2 + (\lambda^2\overline{\Phi}^2 + \overline{m}^2)k + \lambda\overline{\Phi}q = 0.$$

La nature des racines de l'équation (2) dépend, comme on sait, du signe du discriminant $\Delta$ de cette équation.
Le discriminant de l'équation cubique

$$a_0 k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0$$

est déterminé par la formule

$$\Delta = a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 + 18 a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_2^3 a_0 - 27 a_0^2 a_3^2.$$

Dans notre cas

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2\lambda\overline{\Phi}, \quad a_2 = \lambda^2\overline{\Phi}^2 + \overline{m}^2, \quad a_3 = \lambda\overline{\Phi}q$$

et l'expression pour le discriminant $\Delta$ s'écrira sous la forme

$$(3) \qquad \Delta = -4\overline{m}^2(\lambda_2\overline{\Phi}^2 + \overline{m}^2)^2 - 27\lambda^2\overline{\Phi}^2 q^2 + 4\lambda^2\overline{\Phi}^2(\lambda^2\overline{\Phi}^2 + 9\overline{m}^2)q.$$

Si $\Delta \geqslant 0$, toutes les racines de l'équation (2) seront réelles. Si $\Delta < 0$, une racine de l'équation (2) sera réelle et les deux autres seront complexes et conjugées.

Notons que touts les coefficients des degrés $k$ sont essentiellement positifs; le dernier membre $\lambda\overline{\Phi}q$ seul peut avoir l'un ou l'autre signe selon le signe de $q$. Examinons d'abord le cas, où $q$ est négatif.

I. $q < 0$. Dans ce cas, comme on l'aperçoit de la formule (3) $\Delta$ n'est pas nul et il est négatif. Par conséquant l'équation (2) a une racine réelle et deux racines complexes et conjugées. Vu que pour $q < 0$ l'équation (2) change de signes, en vertu du theorème bien connu de Descartes, la racine réelle est positive.

Examinons maintenant les racines complexes de l'équation (2). Soient les racines de cette équation:

$$k_1 = k > 0, \quad k_2 = \alpha + \beta i, \quad k_3 = \alpha - \beta i. \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Vu les propriétés des racines des équations algébriques, nous avons

$$k_1 + k_2 + k_3 = -2\lambda\overline{\Phi}.$$

d'où

$$k + 2\alpha = -2\lambda\overline{\Phi}$$

et

$$2\alpha = -2\lambda\overline{\Phi} - k.$$

Il s'ensuit que $\alpha$ est négatif.

Ainsi dans le cas $q < 0$ l'équation caractéristique du système aux variations a une racine réelle positive et quatre racines avec des parties réelles négatives.

Examinons maintenant le cas où $q$ est positif.

II. $q > 0$. Dans ce cas l'équation (2) ne change pas de signes. Par conséquent l'équation ne peut avoir que des racines réelles négatives. Si le discriminant de l'équation $\Delta \geqslant 0$, toutes les racines seront réelles. Nous avons déjà vu, qu'elles sont négatives. Par coséquent, pour $q > 0$ et $\Delta \geqslant 0$, toutes les cinq racines de l'équation caractéristique du système aux variations auront des parties réelles négatives.

Mais si $\Delta < 0$, une des racines de l'équation (2) sera réelle et négative, et les deux autres seront complexes et conjugées, et il ne nous reste qu'à établir le signe de la partie réelle de ces racines.

Soit la racine réelle négative $k_1$. Soient les deux autres racines, de même que dans le cas précédent

$$k_2 = \alpha + \beta i, \quad k_3 = \alpha - \beta i. \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Vu les propriétés des racines, nous avons

$$k_1 + k_2 + k_3 = k_1 + 2\alpha = -2\lambda\overline{\Phi},$$

$$k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 2\alpha k_1 + (\alpha^2 + \beta^2) = \lambda^2 \overline{\Phi}^2 + \overline{m}^2,$$

$$k_1 k_2 k_3 = k_1(\alpha^2 + \beta^2) = -\lambda\overline{\Phi}q.$$

Ce n'est que la quantité $\alpha$ qui nous intéresse; tachons donc de former une relation qui ne contienne ni $k_1$ ni $\beta$. A cette fin éliminons des deux dernières égalités $\alpha^2 + \beta^2$. Nous obtenons

$$2\alpha k_1 - \frac{\lambda\overline{\Phi}q}{k_1} - (\lambda^2 \overline{\Phi}^2 + \overline{m}^2) = 0$$

où

$$2\alpha k_1^2 - (\lambda^2 \overline{\Phi}^2 + \overline{m}^2) k_1 - \lambda \overline{\Phi} q = 0.$$

En éliminant encore $k_1$ à l'aide de l'égalité $k_1 = -2\alpha - 2\lambda\overline{\Phi}$, nous obtenons la relation cherchée, qui ne contient que $\alpha$.

$$(4) \qquad 8\alpha^3 + 16\lambda\overline{\Phi}\alpha^2 + (10\lambda^2\overline{\Phi}^2 + 2\overline{m}^2)\alpha + \lambda\overline{\Phi}(2\lambda^2\overline{\Phi} + 2\overline{m}^2 - q) = 0.$$

Nous avons trouvé pour $\alpha$ une équation cubique, qui aura toujours au moins une racine réelle.

Introduisons la notation

$$(5) \qquad \overline{q} = 2\lambda^2\overline{\Phi}^2 + 2\overline{m}^2 - q,$$

et formons le discriminant $\overline{\Delta}$ de l'équation (4).
Nous trouvons sans peine

$$(6) \qquad \overline{\Delta} = -64\overline{m}^2(10\lambda^2\overline{\Phi}^2 + 2\overline{m}^2)^2 + 64\lambda^2\overline{\Phi}^2\overline{q}(104\lambda^2\overline{\Phi}^2 + 72\overline{m}^2) - 1728\lambda^2\overline{\Phi}^2\overline{q}^2.$$

De la formule (6) il est évident que pour $\overline{q} < 0$ nous aurons également $\overline{\Delta} < 0$. Par conséquent, l'équation (4) n'aura qu'une racine réelle. Cette racine est positive car pour $\overline{q} < 0$ l'équation (4) ne subit qu'un changement de signes.

Ainsi, dans le cas $\overline{q} < 0$ les parties réelles des racines $k_2$ et $k_3$ seront positives et, par conséquent, l'équation caractéristique du système aux variations aura trois racines avec parties réelles négatives et deux racines avec parties réelles positives.

Mais si $\overline{q} > 0$, l'équation (4) ne changera pas de signes et, par conséquent, elle ne pourra pas avoir de racines réelles positives.

Ceci veut dire que dans ce cas les parties réelles des racines $k_2$ et $k_3$ sont négatives et toutes les cinq racines de l'équation caractéristique du système aux variations auront des parties réelles négatives.

Il nous reste à examiner le cas, où $\overline{q} = 0$. Alors l'équation (4) prend la forme:

$$\alpha[8\alpha^2 + 16\lambda\overline{\Phi}\alpha + (10\lambda^2\overline{\Phi}^2 + 2\overline{m}^2)] = 0,$$

et aura une racine nulle. Les deux autres racines sont, comme il est aisé de le voir, complexes. Ainsi, les parties réelles des racines $k_2$ et $k_3$ sont nulles et l'équation caractéristique du système aux variations aura trois racines avec parties réelles négatives et deux racines purement imaginaires.

Voyons quels sont les cas, où $\overline{q}$ peut devenir nul. Si $\overline{q}$ est nul, la constante $a$ qui détermine la solution périodique, doit satisfaire simultanément aux deux équations:

$$n^2(a) = \frac{1 + M(a)}{a^3},$$

et

$$2\lambda^2 \overline{\Phi}^2 + 2\overline{m}^2 - q = 0$$

qui, en général sont incompatibles, car les racines de la première équation ne dépendent que de la structure de l'atmosphère et de son mouvement, tandis que les racines de la seconde équation dépendent encore du coefficient de viscosite $\lambda$ et de la loi de résistance. Voyons maintenant les cas où $\overline{q}$ peut être nul identiquement. Remplaçons $\overline{q}$, $q$ et $\overline{m}^2$ par leurs valeurs et égalons le résultat à zérò.

Nous obtenons l'équation:

$$\frac{dn^2}{dr} + \frac{5n^2}{r} = -\frac{4\pi\mu + 2\lambda^2\Phi^2}{r}.$$

En la considérant comme une équation différentielle qui détermine $n^2$, nous trouvons par intégration:

$$n^2(r) = \frac{C - \int r^4 (4\pi\mu + 2\lambda^2 \overline{\Phi}^2)\, dr}{r^5}.$$

Mais cette expression n'a pas de sens mécanique simple. Ainsi nous devons conclure que le cas, où les racines de l'équation caractéristique du système aux variations aient des parties réelles nulles, est très peu probable, et c'est pour quoi nous n'examinerons point des cas pareils.

Donnons maintenant les resultats définitifs de notre étude dans l'énoncé suivant:

1. Si $q < 0$, l'équation caractéristique a une racine réelle positive et quatre racine avec parties réelles négatives. Donc, la solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ est instable, mais il existe une stabilité conditionnelle qui dépend de quatre paramètres arbitraires, c'est-à-dire qu'il existe une famille de solutions qui dépend de quatre paramètres et qui est telle, que toute solution appartenant à cette famille est asymptote à la solution triviale pour $t \to +\infty$.

2. Si $q > 0$ et $\Delta \geqslant 0$, toutes les racines de l'équation caractéristique ont des parties réelles négatives. Donc, la solution triviale

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

est absolument et asymptotiquement stable. Ce qui veut dire que toute solution, pour laquelle les perturbations sont suffisamment petites, est asymptote à la solution triviale.

3. Si $q > 0$, $\Delta < 0$ et $\bar{q} < 0$, l'équation caractéristique a deux racines avec parties réelles positives et trois racines, dont les parties réelles sont négatives.

La solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ est donc instable, mais elle possède une stabilité conditionnelle, qui dépend de trois paramètres arbitraires, c'est-à-dire qu'il existe une famille de solutions, qui dépend de trois paramètres et qui est telle, que toute solution appartenant à cette famille est asymptote à la solution triviale pour $t \to +\infty$.

4. Si $q > 0$, $\Delta < 0$ et $\bar{q} > 0$, toutes les racines de l'équation caractéristique ont des parties réelles négatives. Par conséquent, la solution triviale

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

est absolument et asymptotiquement stable.

Toute solution, pour laquelle les perturbations sont suffisamment petites est asymptote à la solution triviale, pour $t \to +\infty$.

Donnons encore l'analyse complète de notre problème sous la forme du schéma suivant:

La solution examinée

$$(R) \qquad \rho = a, \quad \rho' = 0, \quad \Omega = a^2 n(a), \quad z = 0, \quad z' = 0.$$

Les notations:

$$\overline{m}^2(a) = 4\pi\mu(a) + n^2(a); \qquad q(a) = -aQ'(a);$$

$$\bar{q}(a) = 2\lambda^2\overline{\Phi}^2(a) + 2\overline{m}^2(a) - q(a);$$

$$\Delta = -4\overline{m}^2(\lambda^2\overline{\Phi}^2 + \overline{m}^2)^2 - 27\lambda^2\overline{\Phi}^2 q^2 + 4\lambda^2\overline{\Phi}^2(\lambda^2\overline{\Phi}^2 + 9\overline{m}^2)q.$$

$a$ — une racine simple de l'équation

$$Q(r) = n^2(r) - \frac{1 + M(r)}{r^3} = 0.$$

| Cas | $t > t_0$ et $\to +\infty$ |
|---|---|
| $q < 0$ | $(R)$ instable. La stabilité conditionnelle dépend de quatre paramètres. |
| $q > 0$<br>$\Delta \geqslant 0$ | $(R)$ est absolument stable |
| $q > 0$, $\Delta < 0$<br>$\bar{q} < 0$ | $(R)$ instable. La stabilité conditionnelle dépend de trois paramètres. |
| $q > 0$, $\Delta < 0$<br>$\bar{q} > 0$ | $(R)$ est absolument stable. |

Comme on peut juger de ce tableau, le signe de la quantité $q$ a joué un rôle considérable dans la solution de notre problème. On peut attribuer à ce signe

l'interprétation mécanique suivante: Regardons l'expression pour $Q'(r)$. Nous pouvons écrire

$$Q'(r) = \frac{dn^2(r)}{dr} - \frac{d}{dr}\left[\frac{1+M(r)}{r^3}\right]$$

$\frac{1+M(a)}{a^3}$ est le carrée de la vitesse angulaire du mouvement Keplérien pour la distance $a$. La formule précédente montre que pour $q > 0$ la vitesse de la variation de la carrée de la vitesse angulaire de rotation de l'atmosphère sera inférieure à la vitesse de la variation de la carrée de la vitesse angulaire Keplérienne correspondante. Pour $q < 0$ nous avons le tableau inverse.

Pour terminer ce paragraphe, examinons un cas particulier de distribution des vitesses angulaires de la rotation de l'atmosphère et montrons sur cet example comment se resout, dans le problème étudié, la question de la stabilité du mouvement circulaire qui nous intéresse.

Soit $n = n_0 r^{\varkappa}$, mais la densité $\mu$ et la loi de résistance seront absolument arbitraires.

L'équation qui détermine les valeurs de $a$ correspondant aux solutions périodiques s'écrira

$$Q(r) = n_0^2 r^{-2\varkappa+3} - 1 - M(r) = 0.$$

Les valeurs de la fonction $Q(r)$ pour $r = \varepsilon$ et $r = 1$ seront:

$$Q(\varepsilon) = n_0^2 \varepsilon^{-2\varkappa+3} - 1,$$

$$Q(1) = n_0^2 - 1 - M,$$

où $M$ — est la masse totale de l'atmosphère.

Pour l'existance des solutions périodiques il suffit que ces valeurs aient des signes contraires. Nous en concluons que $n_0^2$ doit satisfaire à l'une des deux inégalités:

$$1 + M < n_0^2 < \varepsilon^{3-2\varkappa}$$

$$\varepsilon^{3-2\varkappa} < n_0^2 < 1 + M.$$

Pour établir la stabilité des solutions indiquées calculons $q$ et $\overline{q}$. Nous obtenons

$$q = 4\pi\mu - (3 + 2x) n^2(a).$$

$$\overline{q} = 2\lambda^2 \overline{\Phi}^2 + 4\pi\mu + (5 + 2\varkappa) n^2(a)$$

d'où nous concluons que la condition nécessaire d' instabilité sera

$$\varkappa > -\frac{3}{2}.$$

Au contraire, si

$$\varkappa < -\frac{3}{2},$$

le mouvement sera stable dans le cas $\Delta \geqslant 0$. La stabilité sera indubitable, si de plus

$$\varkappa > -\frac{5}{2}.$$

#### 4. Sur la stabilité des solutions périodiques dans le cas d'une distribution Keplérienne des vitesses de rotation de l'atmosphère

Dans ce paragraphe nous considérons le cas, où la distribution des vitesses angulaires de rotation de l'atmosphère est régie par la loi de Kepler, c'est-á-dire où l'équation

$$n^2(r) = F(r) \equiv \frac{1 + M(r)}{r^3} \tag{1}$$

est une identité par rapport à $r$.

Dans ce cas, comme nous l'avons déjà vu, l'équation caractéristique du système aux variations a une racine nulle, tandis que les autres racines ont des parties réelles négatives.

Ces racines seront

$$-\lambda\overline{\Phi} \pm \sqrt{\lambda^2 \overline{\Phi}^2 - n^2}, \qquad -\lambda\overline{\Phi} \pm \overline{m}i. \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Dans ce cas, comme on sait, les équations aux variations ne permettent pas résoudre la question de la stabilité et nous sommes obligés d'appliquer d'autres méthodes.

Ces méthodes ont été proposées par A. Liapounoff dans son mémoire déjà cité et il ne nous reste qu'à suivre la voie indiquée par l'illustre savant.

Considérons d'abord les équations aux variations. La quantité $p$ qui sert de coefficient à $x_1$ dans la troisième équation, c'est-à-dire la quantité

$$p = a\,[2n(a) + an'(a)]$$

a dans notre cas une expression plus simple. En effet nous avons

$$p = \frac{a}{2n}[4n^2(a) + 2an(a)\,n'(a)] = \frac{a}{2n}\left[4n^2(a) + a\frac{dn^2(a)}{da}\right] =$$

$$= \frac{a}{2n}[4n^2(a) + 4\pi\mu(a) - 3n^2(a)] = \frac{a}{2n}[n^2(a) + 4\pi\mu(a)],$$

ou enfin

$$p = \frac{a\,\overline{m}^2}{2n}.$$

Nous écrivons maintenant les équations aux variations de la façon suivante:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\overline{m}^2 x_1 - \lambda\overline{\Phi} x_2 + \dfrac{2n}{a} x_3; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \lambda\overline{\Phi}\dfrac{a\overline{m}^2}{2n} x_1 - \lambda\overline{\Phi} x_3; \\ \dfrac{dx_4}{dt} = x_5; \\ \dfrac{dx_5}{dt} = -n^2 x_4 - \lambda\overline{\Phi} x_5. \end{cases}$$

On sait que dans le cas où l'équation caractéristique du système aux variations a une racine nulle, ce système admet une intégrale linéaire à coefficients constants. Il est aisé de trouver cette intégrale. A cette fin multiplions la première des équations (2) par $\lambda^2\overline{\Phi}^2$, la seconde par $\lambda\overline{\Phi}$, la troisième par $\frac{2n}{a}$, la quatrième et la cinquième par 0 et additionnons. Nous obtenons:

$$\lambda^2\overline{\Phi}^2 \frac{dx_1}{dt} + \lambda\overline{\Phi}\frac{dx_2}{dt} + \frac{2n}{a}\frac{dx_3}{dt} = 0,$$

d'où

$$(3)\qquad \lambda^2\overline{\Phi}^2 x_1 + \lambda\overline{\Phi} x_2 + \frac{2n}{a} x_3 = \text{const.}$$

C'est l'intégrale cherchée.

Considérons maintenant les équations du mouvement troublé

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ \dfrac{dx_3}{dt} = X_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ \dfrac{dx_4}{dt} = x_5, \\ \dfrac{dx_5}{dt} = X_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \end{cases}$$

où

$$(5)\qquad \begin{cases} X_2 = -\lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2) x_2 - (a + x_1) n^2(r) + \dfrac{(a^2 n + x_3)^2}{(a + x_1)^3}, \\ X_3 = -\lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2)[a^2 n + x_3 - (a + x_1)^2 n(r)], \\ X_5 = -\lambda\Phi(\mu, \overline{V}^2) x_5 - n^2(r) x_4 \end{cases}$$

Transformons ces équations, selon la méthode de A. Liapounoff, en introduisant comme nouvelle variable dépendante, au lieu par exemple de $x_3$, la partie gauche de l'intégrale (3).

Désignons cette variable nouvelle par $x$.

$$x = \lambda^2 \overline{\Phi}^2 x_1 + \lambda \overline{\Phi} x_2 + \frac{2n}{a} x_3 \tag{6}$$

et écrivons les équations pour les variables nouvelles.

Comme

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^2 \overline{\Phi}^2 \frac{dx_1}{dt} + \lambda \overline{\Phi} \frac{dx_2}{dt} + \frac{2n}{a} \frac{dx_3}{dt},$$

le nouveau système aura la forme suivante:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, x_1, x_2, x_4, x_5), \\ \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \overline{X}_2(x, x_1, x_2, x_4, x_5), \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_5, \\ \frac{dx_5}{dt} &= \overline{X}_5(x, x_1, x_2, x_4, x_5), \end{aligned} \right. \tag{7}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{X}_2(x, x_1, x_2, x_4, x_5) &= X_2\left(x_1, x_2, \frac{a}{2n}x - \frac{a\lambda^2\overline{\Phi}^2}{2n}x_1 - \frac{a\lambda\overline{\Phi}}{2n}x_2, x_4, x_5\right), \\ \overline{X}_3(x, x_1, x_2, x_4, x_5) &= X_3\left(x_1, x_2, \frac{a}{2n}x - \frac{a\lambda^2\overline{\Phi}^2}{2n}x_1 - \frac{a\lambda\overline{\Phi}}{2n}x_2, x_4, x_5\right), \\ \overline{X}_5(x, x_1, x_2, x_4, x_5) &= X_5\left(x_1, x_2, \frac{a}{2n}x - \frac{a\lambda^2\overline{\Phi}^2}{2n}x_1 - \frac{a\lambda\overline{\Phi}}{2n}x_2, x_4, x_5\right), \\ X(x, x_1, x_2, x_4, x_5) &= \lambda^2\overline{\Phi}^2 x_2 + \lambda\overline{\Phi}\,\overline{X}_2(x, x_1, x_2, x_4, x_5) + \\ &\quad + \frac{2n}{a}\overline{X}_3(x, x_1, x_2, x_4, x_5). \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Le système transformé possède les propriétés suivantes: 1) La fonction

$$X(x, x_1, x_2, x_4, x_5)$$

ne contient pas dans son développement de termes linéaires; 2) Le déterminant formé par les coefficients de $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_5$ dans les quatre dernières équations (7) n'est pas nul.

En effet, l'ensemble des termes linéaires dans le développement de la fonction $X$ a l'aspect suivant:

$$\lambda^2 \overline{\Phi}^2 x_2 + \lambda \overline{\Phi} \cdot \left(\text{l'ensemble des termes linéaires dans } \overline{X}_2\right) +$$
$$+ \frac{2n}{a} \cdot \left(\text{l'ensemble des termes linéaires dans } \overline{X}_3\right) = 0,$$

en vertu de l'existence de l'intégrale (3) du système des équations aux variations (2).

Pour vérifier la seconde propriété écrivons les termes linéaires des quatre dernières équations (4). Nous avons

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -(\overline{m}^2 + \lambda^2 \overline{\Phi}^2) x_1 - 2\lambda\overline{\Phi} x_2 + x + \ldots, \\ \dfrac{dx_4}{dt} = x_5, \\ \dfrac{dx_5}{dt} = -n^2 x_4 - \lambda \overline{\Phi} x_5 + \ldots \end{cases}$$

Le déterminant formé par les coefficients de $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_5$ s'écrira

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\overline{m}^2 + \lambda^2 \overline{\Phi}^2) & -2\lambda\overline{\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -n^2 & -\lambda\overline{\Phi} \end{vmatrix}$$

En calculant ce déterminant, nous obtenons

$$(10) \qquad D_1 = n^2 (\overline{m} + \lambda^2 \overline{\Phi}^2) \neq 0.$$

Remarquons encore que l'équation caractéristique du système que nous obtenons en ne conservant dans les équations (9) que les termes linéaires en $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_5$, a des racines, dont les parties réelles ne sont pas nulles et sont négatives. Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de cette proposition, car il est aisé de la vérifier directement.

Il nous reste encore à soumettre le système (7) à une transformation, dont le but est l'élimination dans les parties droites des équations (7) de tous les termes, qui ne contiennent pas les variables

$$x_1, \ x_2, \ x_4, \ x_5.$$

Dans ce but considérons le système des équations que nous obtenons en égalant à zéro les parties droites des quatre dernières équations du système (7).

$$(11)\qquad \begin{cases} x_2 = 0, \\ \overline{X}_2(x, x_1, x_2, x_4, x_5) = 0, \\ x_5 = 0, \\ \overline{X}_5(x, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0. \end{cases}$$

Les parties gauches de ces équations étant des fonctions holomorphes de leurs variables devenant nulles si

$$x = x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0,$$

et le determinant fonctionnel de ces fonctions n'étant pas nul pour

$$x = x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0,^*$$

les équations (11) sont résolubles par rapport aux quantités $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_5$ et ces solutions sont des fonctions holomorphes de la variable $x$, devenant nulles pour $x = 0$. Il est aisé de voir, que cette solution peut être écrite sous la forme

$$(12)\qquad \begin{cases} x_1 = u(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

En retournant maintenant au système (7), transformons le à l'aide de la substitution

$$(23)\qquad x_1 = u + z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_4 = z_3, \quad x_5 = z_4$$

où $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ sont de nouvelles variables dépendantes. Le système transformé aura la forme:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Z(x, z_1, z_2, z_3, z_4), \\ \dfrac{dz_1}{dt} = Z_1(x, z_1, z_2, z_3, z_4), \\ \dfrac{dz_2}{dt} = Z_2(x, z_1, z_2, z_3, z_4), \\ \dfrac{dz_3}{dt} = Z_3(x, z_1, z_2, z_3, z_4), \\ \dfrac{dz_4}{dt} = Z_4(x, z_1, z_2, z_3, z_4), \end{cases}$$

* L'inégalité à zéro du déterminant indiqué se manifeste par le fait que pour

$$x = x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$$

il coïncide avec le déterminant $D_1$, qui n'est pas nul.

où

$$Z(x, z_1, z_2, z_3, z_4) = X(x, u + z_1, z_2, z_3, z_4),$$

$$Z_1(x, z_1, z_2, z_3, z_4) = z_2 - \frac{du}{dx} \cdot Z(x, z_1, z_2, z_3, z_4),$$

$$Z_2(x, z_1, z_2, z_3, z_4) = \overline{X}_2(x, u + z_1, z_2, z_3, z_4),$$

$$Z_3(x, z_1, z_2, z_3, z_4) = z_4$$

$$Z_4(x, z_1, z_2, z_3, z_4) = \overline{X}_5(x, u + z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Il est évident que les fonctions $Z, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ sont des fonctions holomorphes de leurs variables, devenant nulles, si

$$x = z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0.$$

Il est aisé de voir de même que ces fonctions possédent la propriété nécessaire pour notre but, c'est-à-dire, qu'elle ne contiennent pas dans leurs développements de termes, indépendants de $z_1, z_2, z_3, z_4$. En effet, en posant dans les expressions (15) $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$, nous avons:

$$(16) \quad \begin{cases} Z(x, 0, 0, 0, 0) = X(x, u, 0, 0, 0), \\ Z_1(x, 0, 0, 0, 0) = -\frac{du}{dx} \cdot Z(x, 0, 0, 0, 0), \\ Z_2(x, 0, 0, 0, 0) = \overline{X}_2(x, u, 0, 0, 0), \\ Z_3(x, 0, 0, 0, 0) = 0, \\ Z_4(x, 0, 0, 0, 0) = \overline{X}_5(x, u, 0, 0, 0). \end{cases}$$

Mais $\overline{X}_2(x, u, 0, 0, 0) = \overline{X}_5(x, u, 0, 0, 0) \equiv 0$, vu que (12) est la solution du système d'équations (11). $Z_1(x, 0, 0, 0, 0)$ devient nulle simultanément avec $Z(x, 0, 0, 0, 0)$. Mais

$$Z(x, 0, 0, 0, 0) = X(x, u, 0, 0, 0) = \lambda \overline{\Phi} \overline{X}_2(x, u, 0, 0, 0) +$$

$$+ \frac{2n}{a} \overline{X}_3(x, u, 0, 0, 0) = \frac{2n}{a} \overline{X}_3(x, u, 0, 0, 0) =$$

$$= X_3\left(u, 0, \frac{a}{2n} x - \frac{a\lambda^2 \overline{\Phi}^2}{2n} u, 0, 0\right).$$

Maintenant des formules (5) nous trouvons

$$X_3\left(u, 0, \frac{a}{2n} x - \frac{a\lambda^2 \overline{\Phi}^2}{2n} u, 0, 0\right) =$$

$$= -\lambda \left[\Phi\left(\mu_1 \overline{V}^2\right)\right]_0 \left\{a^2 n + \frac{a}{2n} x - \frac{a\lambda^2 \overline{\Phi}^2}{2n} u - (a + u)^2 n (a + u)\right\}$$

où $\left[\Phi\left(\mu, \overline{V}^2\right)\right]_0$ désigne le résultat de la substitution à $x_1, x_2, x_4, x_5$ de leurs valeurs.

Démontrons maintenant que l'expression entre accolades est identiquement nulle. En effet, nous avons

$$\overline{X}_2(x, u, 0, 0, 0) \equiv 0.$$

En vertu de la formule (5) nous avons identiquement

$$\overline{X}_2(x, u, 0, 0, 0) \equiv -(a+u)n^2(a+u) + \frac{\left(a^2 n + \frac{a}{2n}x - \frac{a\lambda^2\overline{\Phi}^2}{2n}u\right)^2}{(a+u)^3} \equiv 0$$

ce qui peut être écrit comme suit

$$\left(a^2 n + \frac{a}{2n}x - \frac{a\lambda^2\overline{\Phi}^2}{2n}u\right)^2 - (a+u)^4 n^2 (a+u) \equiv 0$$

ou

$$\left[a^2 n + \frac{a}{2n}x - \frac{a\lambda^2\Phi^2}{2n}u + (a+u)^2 n(a+u)\right]\left[a^2 n + \frac{a}{2n}x - \right.$$
$$\left. - \frac{a\lambda^2\overline{\Phi}^2}{2n}u - (a+u)^2 n(a+u)\right] \equiv 0$$

mais le premier facteur du produit est une quantité essentiellement positive pour les petites valeurs de $x$ et ne peut pas devenir identiquement nulle.

Par conséquent nous devons avoir:

$$a^2 n + \frac{a}{2n}x - \frac{a\lambda^2\overline{\Phi}^2}{2n}u - (a+u)^2 n(a+u) \equiv 0.$$

Cette identité montre que

$$X_3\left(u, 0, \frac{a}{2n}x - \frac{a\lambda^2\overline{\Phi}^2}{2n}u, 0, 0\right)$$

est identiquement nulle. Par conséquent $Z(x, 0, 0, 0, 0)$ est nulle également et par suite toutes les expressions (16) sont égales à zéro identiquement.

Ainsi les parties droites des équations (14) sont des fonctions holomorphes des variables $x, z_1, z_2, z_3, z_4$ qui deviennent nulles pour

$$x = z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$$

et qui ne contiennent dans leurs developpements selon les puissances de ces quantités de termes indépendants de $z_1, z_2, z_3, z_4$. De plus la fonction $Z$ est telle que son développement commence par les termes au moins du second ordre. Enfin, les fonctions $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ possèdent la propriété que toutes les racines

de l'équation caractéristique du système aux variations, obtenu des quatre dernières équations du système (4), ont des parties réelles négatives. Ceci se manifeste par le fait que dans le système aux variations indiqué les coefficients des premiers degrés de $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ sont identiques aux coefficients des premiers degrés de $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_5$ du système d'équations (9).

Notons en outre que le système (14) est tout-à-fait équivalent au système initial (7) et le problème de la stabilité par rapport aux anciennes variables

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5$$

est tout-à-fait équivalent au problème de la stabilité par rapport aux nouvelles variables $x$, $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$; ainsi, en résolvant un problème dans un sens affirmatif ou négatif, nous résoudrons en même temps l'autre dans le même sens.

Mais pour résoudre la question de la stabilité de la solution triviale

$$x=0,\ z_1=0,\ z_2=0,\ z_3=0,\ z_4=0$$

du système (14) il nous suffit à present d'appliquer le théoreme bien connu de A. Liapounoff, démontrée pour un système d'ordre quelconque et possédant les mêmes propriétés que notre système particulier du 5-me ordre.

En appliquant ce théorème, nous obtenons les résultats suivants: en vertu des propriétés des fonctions $Z$, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$ le système (14) admettra une solution particulière

$$\left\{\begin{array}{l} x=c, \\ z_1=0,\ z_2=0,\ z_3=0,\ z_4=0 \end{array}\right. \tag{17}$$

ou $c$ est une constante arbitraire. A toute valeur réelle de la constante $c$ il correspondra une solution déterminée du système (14). En changeant cette constante d'une maniere continue, nous obtenons une serie continue de solutions contenant (pour $c=0$) entre autres la solution triviale du système (14), dont nous rechercherons la stabilité.

Le théorème de A. Liapounoff, que nous venons de mentionner, établit que, le module de $c$ étant suffisamment petit, toute solution appartenant à cette famille, y compris la solution triviale étudiée, est *stable*. *Toute autre solution* du système (14) déterminée par les perturbations dont les valeurs absolues sont assez petites *sera asymptote à l'une des solutions de la famille* (17).

Ainsi le problème de la stabilité dans le cas d'une distribution Keplérienne des vitesses angulaires de rotation de l'atmosphère est entièrement résolu.

En revenant maintenant aux variables $x$, $x_1$, $x_2$, $x_4$, $x_5$ nous trouvons que la famille des solutions particulières (17) prendra la forme

$$(18) \qquad \begin{cases} x = c, \\ x_1 = u(c) = a_1 c + a_2 c^2 + \ldots, \\ x_2 = 0, \ x_4 = 0, \ x_5 = 0, \end{cases}$$

et toute solution de cette famille, correspondant à une valeur absolue de $c$ suffisamment petite, sera stable.

En passant enfin aux variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ nous obtenons la solution particulière suivante, correspondant à (18)

$$\lambda^2 \overline{\Phi}^2 x_1 + \lambda \overline{\Phi} x_2 + \frac{2n}{a} x_3 = c,$$

$$x_1 = a_1 c + a_2 c^2 + \ldots,$$

$$x_2 = x_4 = x_5 = 0,$$

d'où nous déduisons:

$$(19) \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 c + a_2 c^2 + \ldots, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = \frac{a}{2n}(1 - \lambda^2 \overline{\Phi}^2 a_1) c - \frac{a\lambda^2 \overline{\Phi}^2}{2n} a_2 c^2 + \ldots, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

En calculant au moyen des équations (11) les coeffiicients du développement de la fonction $u(x)$, c'est-à-dire les nombres $a_1$, $a_2$, ... nous écrivons la solution (19) sous la forme

$$(20) \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\overline{m}^2 + \lambda^2 \overline{\Phi}^2} c + \ldots, \\ x_2 = 0. \\ x_3 = \frac{p}{\overline{m}^2 + \lambda^2 \overline{\Phi}^2} c + \ldots, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

En revenant enfin aux variables $\rho, \rho', \Omega, z, z'$ nous obtenons pour le système (9) § 1, la famille suivante de solutions particuliéres:

$$
(21) \quad \begin{cases} \rho = a + \dfrac{1}{\overline{m}^2 + \lambda^2 \overline{\Phi}^2} c + \dots, \\ \rho' = 0, \\ \Omega = a^2 n(a) + \dfrac{p}{\overline{m}^2 + \lambda^2 \overline{\Phi}^2} c + \dots, \\ z = 0, \\ z' = 0. \end{cases}
$$

Toute solution de cette famille, correspondant à une valeur suffisamment petite de la constante arbitraire $c$ sera stable. En particulier sera indubitablement stable la solution que nous étudions

$$
(22) \qquad \rho = a, \ \rho' = 0, \ \Omega = a^2 n(a), \ z = 0, \ z' = 0,
$$

à laquelle correspond la valeur $c = 0$.

Toute autre solution du système (9) § 1, dans laquelle les valeurs initiales des fonctions $\rho, \rho', \Omega, z, z'$ diffèrent suffisamment peu des valeurs (22), sera asymptote à l'une des solutions, appartenant à la famille (21), pour $t \to \infty$.

Rappelons nous que $a$ est un nombre quelconque compris entre $\varepsilon$ et 1 et nous verrons que tout mouvement circulaire Keplérien dans notre problème sera stable absolument et de plus asymptotiquement. Pourtant, les mouvements voisins aux mouvements circulaires par les donnés initiales ne sont pas nécessairement asymptotes au mouvement circulaire initial, mais, en général, à l'un des mouvements circulaires, qui diffère assez peu du mouvement initial.

Ces resultats sont valables pour toute solution périodique, correspondant à la valeur $a$ comprise dans l'intervalle $(\varepsilon, 1)$.

On peut assurément faire les mêmes déductions pour les solutions périodiques limites, correspondant aux valeurs du paramètre

$$
a = \varepsilon \quad \text{et} \quad a = 1.
$$

Seulement dans ces cas la constante arbitraire $c$ ne peut pas recevoir toutes les valeurs réelles. En effet, si $a = \varepsilon$, $c$ ne peut avoir qu'une valeur positive, et si $a = 1$, qu'une valeur négative. Les valeurs initiales qui déterminent quelqu'autre solution de notre problème, voisine des solutions périodiques limites ne peuvent également être arbitraire et nous devons leur imposer les réstrictions suivantes:

$$
\text{pour} \quad a = \varepsilon, \quad x_1^0 > 0,
$$

$$
\text{pour} \quad a = 1, \quad x_1^0 < 0.
$$

Pour tout le reste les valeurs initiales $x_1^0$, $x_2^0$, $x_3^0$, $x_4^0$, $x_5^0$ restent des quantités tout-à-fait arbitraires, mais sans doute assez petites par les valeurs absolues.

Toute solution du système (8) § 1 pour laquelle ces perturbations

$$x_1^0 (\gtrless 0),\ x_2^0,\ x_3^0,\ x_4^0,\ x_5^0$$

sont suffisamment petites, sera asymptote à l'une des solutions circulaires assez peu voisine de la solution limite.

Institut Astronomique de l'État
P. K. Sternberg.
Moscou, Février, 1935.

## Г. Н. ДУБОШИН. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе исследуется устойчивость по Ляпунову круговых, Кеплеровских движений в сопротивляющейся среде.

Допуская, что материальная точка движется в атмосфере некоторого неподвижного тела, причем кроме Ньютонианского притяжения этого тела она подвержена еще гравитационному действию вращающейся атмосферы и силе сопротивления, зависящей достаточно произвольным образом от плотности атмосферы и относительной скорости движущейся точки, мы нашли что при некоторых условиях возможны круговые Кеплеровские движения материальной точки.

Пользуясь методами А. М. Ляпунова, мы исследовали устойчивость таких круговых движений и обнаружили, что в случае, когда атмосфера вращается согласно 3-му закону Кеплера, то такие круговые движения действительно существуют и что они, в этом случае, всегда устойчивы.

В случае, когда атмосфера вращается по произвольному закону, отличному от Кеплеровского, такие решения могут существовать, но могут и не существовать.

В случае их существования эти круговые решения, в зависимости от скорости вращения атмосферы, могут быть и устойчивыми и неустойчивыми.

Государственный Астрономический Институт
им. П. К. Штернберга.
Москва, февраль 1935 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# О КОРНЯХ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

**Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ**

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**)

§ **1. Введение.** В этой статье мы даем применение методов, изложенных нами в работе «О численном решении интегральных уравнений»,* к нахождению корней функции, определяемой дифференциальным уравнением:

(1) $$a(x)y'' + b(x)y' + [\lambda + q(x)]y = 0.$$

Пусть некоторому значению параметра $\lambda$ соответствует решение $y(x)$, удовлетворяющее предельным условиям

$$y(c) = 0, \quad y(d) = A.$$

Функции

$$a(x), \quad b(x), \quad q(x)$$

предполагаются непрерывными в интервале

$$c \leqslant x \leqslant d, \qquad (d > c \geqslant 0)$$

$a(x)$ отлична от нуля в том же интервале.

Пусть уравнение

$$y(x) = 0$$

имеет $m$ действительных различных корней

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_{m-1},$$

заключенных между $c$ и $d$. В случае $\alpha_{m-1} = d$ мы будем полагать $A = 0$.

Обозначим $\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}$ через $l_\nu$. Разобьем интервал $l_\nu$ на $n$ равных частей

$$(l_\nu = nh).$$

* Изв. Акад. Наук СССР, 1935, № 2, стр. 255.

Предложим себе найти, одним из способов, изложенных в вышеупомянутой работе, решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее предельным условиям

$$y(\alpha_{\nu-1})=0, \quad y(\alpha_\nu)=0.$$

В выражение для $y$ войдут $h$ и $\lambda$, благодаря чему $y$ представится функцией $y(h, \lambda)$; остается определить значение $y(h, \lambda)$ в конце интервала $l_\nu$ таким образом, чтобы

(2) $$y(h, \lambda)=0.$$

Это требование даст некоторое уравнение относительно $h$. Наименьший корень полученного уравнения можно принять за приближенное значение

$$\frac{l_\nu}{n}.$$

Достаточно, очевидно, знать корень $\alpha_0$, чтобы простым суммированием определить корень $\alpha_1$. Затем, аналогично изложенному, вычисляются корни

$$\alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \alpha_{m-1}.$$

Чем больше точек деления интервала $l_\nu$ (т. е. чем больше $n$), тем точнее определяется величина $l_\nu$, однако, для большего значения $n$ решение уравнения (2) представит непреодолимые трудности.

Для практических целей удобнее определить $l_\nu$, приписывая $n$ небольшие значения, а затем полагая

$$\bar{\alpha}_{\nu+1}=\alpha_\nu+l_\nu,$$

уточнить искомый корень с помощью формулы: *

(3) $$\alpha_{\nu+1}=\bar{\alpha}_{\nu+1}-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2!\,3!\ldots r!}\frac{y^r(\bar{\alpha}_{\nu+1})}{[y'(\bar{\alpha}_{\nu+1})]^{\frac{r(r+1)}{2}}}\Delta_r(\bar{\alpha}_{\nu+1}),$$

где

$$\Delta_r(\bar{\alpha}_{\nu+1})=\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-2} & a_3^{r-3} & \ldots & a_{r-1}^{r-1} \\ a_1^r & a_2^r & a_3^r & \ldots & a_{r-1}^r \end{vmatrix},$$

$$a_j^i=\left\{\frac{d^i}{dx^i}[y(x)-y(\bar{\alpha}_{\nu+1})]^j\right\}_{x=\bar{\alpha}_{\nu+1}},$$

* Вывод формулы (3) будет указан ниже. См. § 4.

а $\bar{\alpha}_{\nu+1}$ обозначает приближенное значение $\alpha_{\nu+1}$.

В частности

$$\Delta_1(\bar{\alpha}_{\nu+1}) = 1,$$

$$\Delta_2(\bar{\alpha}_{\nu+1}) = a_1^2,$$

$$\Delta_3(\bar{\alpha}_{\nu+1}) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4(\bar{\alpha}_{\nu+1}) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 \end{vmatrix},$$

и т. д.

Формула (3) справедлива в предположении, что $y'(\bar{\alpha}_{\nu+1}) \neq 0$.

Легко удостовериться, что каждый член ряда (3) может быть составлен выполнением некоторых арифметических действий над величинами:

$$\frac{y(\bar{\alpha}_{\nu+1})}{y'(\bar{\alpha}_{\nu+1})}, \quad \frac{y''(\bar{\alpha}_{\nu+1})}{y'(\bar{\alpha}_{\nu+1})}, \ldots, \quad \frac{y^{(p)}(\bar{\alpha}_{\nu+1})}{y'(\bar{\alpha}_{\nu+1})}, \ldots$$

Сверх того, дифференцируя (1) нужное число раз и выполняя соответствующие преобразования, можем выразить любую из величин

(4) $$\frac{y^{(p)}(\bar{\alpha}_{\nu+1})}{y'(\bar{\alpha}_{\nu+1})} \qquad (p = 2, 3, \ldots)$$

через

$$\frac{y(\bar{\alpha}_{\nu+1})}{y'(\bar{\alpha}_{\nu+1})}.$$

Конечно, функции

$$a(x), \quad b(x), \quad q(x)$$

должны быть уже аналитическими в интересующей нас области.

Ниже мы поясним эти общие рассуждения на примерах определения корней функции Бесселя и полиномов Лежандра. Выражения для названных функций известны, следовательно, без особого труда получим точное значение величины

$$\frac{y(\bar{\alpha}_{\nu+1})}{y'(\bar{\alpha}_{\nu+1})},$$

а равно и любой из величин (4).

Следует заметить, что формула (3) практически удобна для решения уравнений вида

(5) $$\varphi(z) = t,$$

где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая внутри некоторой замкнутой области $G$, содержащей точку $u_k$, если величина $|z - u_k|$ достаточно мала.

Наконец, мы даем один простой признак сходимости ряда (3), который позволяет установить практически удобную оценку высшего предела погрешности вычисляемого корня.

§ 2. **Вычисление корней с помощью разностной методы.** Заменим дифференциальное уравнение (1) уравнением в конечных разностях:

$$A_{i+1} Y_{i+1} + B_i Y_i + C_{i-1} Y_{i-1} = 0, \quad (i=1, 2, \ldots, n-1;\ nh = l_\lambda), \tag{6}$$

где

$$A_{i+1} = a_i + \frac{h}{2} b_i, \quad B_i = (q_i + \lambda) h^2 - 2a_i, \quad C_{i-1} = a_i - \frac{h}{2} b_i.$$

Система (6) только тогда имеет решение, кроме очевидного,

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_{n-1} = 0,$$

когда

$$\begin{vmatrix} B_1 & A_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ C_1 & B_2 & A_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & B_3 & A_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & B_{n-2} & A_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_{n-2} & B_{n-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Для определения приближенного значения $l_\nu$ достаточно решить (7) относительно $h$.

Положим теперь, что требуется определить корни Бесселевой функции $J_p (p \geqslant 0)$. Функция $J_p$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$x^2 \frac{d^2 J_p}{dx^2} + x \frac{dJ_p}{dx} + (x^2 - p^2) J_p = 0. \tag{8}$$

Полагая $u = J_p \sqrt{x}$, мы представим это уравнение в виде

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(1 + \frac{1-4p^2}{4x^2}\right) u = 0. \tag{9}$$

Функция $J_p(x)$, а следовательно и $u(x)$, имеет бесчисленное множество вещественных корней. Заметим, что $x=0$ является корнем функции $J_p(x)$ и что остальные корни симметричны относительно нуля.

Нетрудно найти приближенное значение разности

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = l_\nu$$

двух последовательных положительных корней Бесселевой функции, если один из них $\alpha_\nu$ вычислен.

В самом деле, значение корня $\alpha_\nu$ приводит нас для определения $l_\nu$ к уравнению:

$$\begin{vmatrix} z-\frac{bh^2}{[\alpha_\nu+h]^2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & z-\frac{bh^2}{[\alpha_\nu+2h]^2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots\, z-\frac{bh^2}{[\alpha_\nu+(n-2)h]^2} & & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & z-\frac{bh^2}{[\alpha_\nu+(n-1)h]^2} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$z = h^2 - 2, \quad b = \frac{1-4p^2}{4}.$$

Для вычисления $l_\nu$ по формуле

$$l_\nu = nh$$

достаточно определить наименьший корень полученного уравнения.

При больших значениях $\alpha_\nu$ и малых значений $p$ можно положить

$$1 - \frac{b}{(\alpha_\nu + ih)^2} \approx 1. \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

В этом предположении приближенное значение $h$ будет удовлетворять уравнению:

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & z & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Решая полученное уравнение, мы имеем:

$$z = -2\cos\frac{\nu\pi}{n}. \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

Следовательно,

$$l_\nu \approx 2n \sin \frac{\pi}{2n} \cdot$$

С помощью предельного перехода находим

$$l_\nu \approx \pi.$$

Из только-что проделанных нами вычислений следует одно интересное заключение: разность двух последовательных больших по значению корней $J_p(x)$, при малых значениях $p$, с значительной точностью равна $\pi$.

Чтобы показать приложение полученного результата на конкретном случае, пусть $p = 0$. Пусть еще имеем

$$\alpha_1 = 2.4048.$$

За приближенное значение $\alpha_2$ можем принять

$$\alpha_2 \approx \alpha_1 + \pi = 5.5464.$$

С целью сокращения вычислительной работы, округляя значение $\alpha_2$, мы получим:

$$\bar{\alpha}_2 = 5.54.$$

Точное значение корня доставит формула (3). Для употребления этой формулы необходимо иметь величины:

$$\frac{u(\bar{\alpha}_2)}{u'(\bar{\alpha}_2)}, \quad \frac{u''(\bar{\alpha}_2)}{u'(\bar{\alpha}_2)}, \quad \frac{u'''(\bar{\alpha}_2)}{u'(\bar{\alpha}_2)}, \ \ldots$$

После несложных вычислений находим:

$$\frac{u(\bar{\alpha}_2)}{u'(\bar{\alpha}_2)} = \frac{2\bar{\alpha}_2 J_0(\bar{\alpha}_2)}{J_0(\bar{\alpha}_2) - 2\bar{\alpha}_2 J_1(\bar{\alpha}_2)} = 0.01994,$$

$$\frac{u''(\bar{\alpha}_2)}{u'(\bar{\alpha}_2)} = -\left(1 + \frac{1}{4\bar{\alpha}_2^2}\right)\frac{u(\bar{\alpha}_2)}{u'(\bar{\alpha}_2)} = -0.02010,$$

$$\frac{u'''(\bar{\alpha}_2)}{u'(\bar{\alpha}_2)} = \frac{u(\bar{\alpha}_2)}{2\bar{\alpha}_2^3 u'(\bar{\alpha}_2)} - \left[1 + \frac{1}{4\bar{\alpha}_2^2}\right] = -1.00809,$$

и, наконец,

$$\alpha_2 = 5{,}54 - 0.01994 + \ldots$$

Следовательно,

$$\alpha_2 = 5.5201.$$

Полученное значение корня верно до четвертого десятичного знака включительно.

В качестве второго примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+p(p+1)y=0, \tag{10}$$

которому удовлетворяют полиномы Лежандра $X_p$.

Функция $X_p$ имеет $p$ вещественных корней, заключенных в промежутке $(-1, +1)$. Корни эти симметричны относительно $x=0$. При $p$ нечетном $x=0$ является корнем полинома $X_p$.

Рассмотрим сначала случай четного значка. Пусть $\alpha_0$ обозначает наименьший положительный корень уравнения

$$X_p=0.$$

Разобьем интервал $(-\alpha_0, +\alpha_0)$ на четыре равные части. Пусть будут

$$X_{p0},\ X_{p1},\ X_{p2}$$

соответственно обозначать значения $X_p$ в точках деления с абсциссами

$$0,\ h,\ 2h,$$

где

$$h=\frac{\alpha_0}{2}.$$

Заменяя дифференциальное уравнение (10) уравнением, в конечных разностях мы получим:

$$X_{p0}=[2(1-h^2)-p(p+1)h^2]X_{p1},$$
$$2X_{p1}=[2-p(p+1)h^2]X_{p0},$$

откуда следует, что $h$ должна быть корнем уравнения

$$(a^2-1)h^4-4ah^2+2=0,$$

где

$$a=p(p+1)+1.$$

Заметим, что наименьшему корню $\alpha_0$ соответствует наименьшее значение $h$ и, следовательно, при решении этого биквадратного уравнения достаточно определить только наименьший корень.

Вычисление показывает, что

$$h=\sqrt{\frac{2a-\sqrt{2(1+a^2)}}{a^2-1}},$$

откуда

$$\alpha_0\approx 2\sqrt{\frac{2a-\sqrt{2(1+a^2)}}{a^2-1}}. \tag{11}$$

Пусть $p = 6$. Тогда мы имеем:

$$\alpha_0 \approx 0.233.$$

Истинное значение искомого корня с тремя значащими цифрами есть

$$\alpha_0 = 0.239.$$

Чтобы судить о степени годности формулы (11) при возрастании значка $p$, рассмотрим случай, когда $p = 100$. Вычисление показывает, что

$$\alpha_0 \approx 0.01523.$$

Рассмотрим асимптотическое выражение для полиномов Лежандра:

$$X_p(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi p \sin\vartheta}} \left\{ \cos\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{\pi}{4}\right] + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}$$

$$0 < \vartheta < \pi,$$

данное Лапласом. Если пренебречь величиной $O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right)$, то произведя вычисление, находим формулу:

$$\alpha_k = \cos\frac{\left(k + \frac{3}{4}\right)\pi}{p + \frac{1}{2}}, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2 \ldots)$$

которая для больших значений $p$ с значительной точностью доставляет корни уравнения

$$X_p = 0.$$

Полагая $k = 49$, находим, что положительный корень уравнения

$$X_{100} = 0,$$

имеющий наименьшее значение, есть

$$\alpha_0 \approx 0.01563.$$

Заметим, что для достаточно больших значений значка $p$ формула (11) может быть заменена следующей:

$$\alpha_0 \approx 2\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{a - \frac{1}{a}}}.$$

Что касается вычисления остальных корней

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots,\ \alpha_{p-2}$$

уравнения

$$X_p = 0,$$

то с помощью коэффициентов

$$1 - x^2,\ 2x,\ p(p+1)$$

дифференциального уравнения (10) составляется, а затем решается относительно $h$ соответствующее уравнение вида (7).

Наконец, заметим, что если установлено приближенное значение корня функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению, то улучшенное значение этого корня может быть получено также с помощью уравнения (7).

Пусть, например, с помощью корня $\alpha_\nu$ Бесселевой функции $J_p$ нашли приближенное значение корня $\alpha_{\nu+1}$. Вычисляем $h$ по формуле

$$h = \frac{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu}{n},$$

вычисляем затем величины

$$B_i = -\left[2 + \frac{(1-4p^2)h^2}{4(\alpha_\nu + ih)^2}\right], \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

составляем и решаем относительно $h^2$ уравнение

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} h^2+B_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & h^2+B_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h^2+B_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & h^2+B_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & h^2+B_{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Если обозначить через $\sigma_{n-1}$ определитель, получаемый из определителя (12) вычитанием числа $h^2$ только лишь из главных его элементов, а через $\sigma_{n-1-s}$ — сумму всех главных миноров порядка $n-1-s$ определителя $\sigma_{n-1}$, тотчас увидим, что

$$(13)\qquad \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} z + \ldots + \sigma_2 z^{n-3} + \sigma_1 z^{n-2} + z^{n-1} = 0,$$

где $z = h^2$.

Так как все элементы составленного симметрического определителя вещественны, то и все корни полученного уравнения также вещественны.

Корень уравнения (13), имеющий наименьшее значение, может быть вычислен, например, рядом Э. Уиттекера:

$$-\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-2}}-\frac{\sigma_{n-1}^2\,\sigma_{n-3}}{\sigma_{n-2}\begin{vmatrix}\sigma_{n-2} & \sigma_{n-3}\\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2}\end{vmatrix}}-\frac{\sigma_{n-1}^3\begin{vmatrix}\sigma_{n-3} & \sigma_{n-4}\\ \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sigma_{n-2} & \sigma_{n-3}\\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \sigma_{n-4}\\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3}\\ 0 & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2}\end{vmatrix}}-\ldots$$

Улучшенное значение корня $\alpha_{\nu+1}$ будет

$$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+nh.$$

Поясним это на примере. Пусть имеем для Бесселевой функции $J_0$

$$\alpha_1=2.4048.$$

За приближенное значение $\alpha_2$ можем принять величину

$$\alpha_1+\pi.$$

Разобьем интервал $\pi$ на $n=5$ равных частей $\left(h=\frac{\pi}{5}\right)$. Составляем уравнение

$$\begin{vmatrix} h^2+B_1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & h^2+B_2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & h^2+B_3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & h^2+B_4 \end{vmatrix}=0,$$

где

$$B_i=-\left[2+\frac{0.01\pi^2}{(\alpha_1+0.2i\pi)^2}\right]. \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Вычисление показывает, что

$$\alpha_2-\alpha_1\approx 3.115,$$

следовательно,

$$\alpha\approx 5.5198.$$

§ 3. **Вычисление корней с помощью интегрального уравнения.** Сущность этого способа заключается в замене дифференциального уравнения (1), с предельными условиями

$$y(\alpha_\nu)=0,\ \ y(\alpha_{\nu+1})=0,$$

эквивалентным линейным интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, с последующим решением полученного интегрального уравнения. Чтобы удовлетворить предельному требованию в конце интервала $l_\nu$ необходимо положить

$$y(h,\ \lambda)=0.$$

Это требование доставит некоторое уравнение относительно $h$. Таким образом, задача нахождения корней функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (1), приводится к отысканию наименьшего корня уравнения.

$$y(h\lambda)=0.$$

Применим изложенную методу к нахождению корней Бесселевой функции.

Сводя дифференциальное уравнение (9) к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, мы получим:

$$u(x)=(x-\alpha_\nu)u'_{\alpha_\nu}-\int_{\alpha_\nu}^{x}\left(1+\frac{1-4p^2}{4s^2}\right)(x-s)u(s)\,ds,$$

где $u'_{\alpha_\nu}$ — значение производной в точке $\alpha_\nu$.

Разобьем промежуток $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ на $n$ равных промежутков промежуточными точками с абсциссами

$$\alpha_\nu+h,\ \alpha_\nu+2h,\ \ldots,\ \alpha_\nu+(n-1)h.$$

Положим теперь

$$u_i=u(\alpha_\nu+ih), \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

$$b=\frac{1-4p^2}{4},$$

$$A_i=h^2+\frac{bh^2}{(\alpha_\nu+ih)^2}. \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

При посредстве формулы трапеции получается

$$u_i=ihu'_{\alpha_\nu}-[(i-1)A_1u_1+(i-2)A_2u_2+\ldots+2A_{i-2}u_{i-2}+A_{i-1}u_{i-1}].$$

Полагая последовательно $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ мы убедимся, что $u_n$ представится в виде произведения некоторой функции $\varphi(h,\lambda)$ на $u'_{\alpha_\nu}$, откуда следует, что $h$ должна быть корнем уравнения

$$\varphi(h,\lambda)=0.$$

Теперь мы покажем применение изложенного на численном примере. Пусть

$$p=\frac{1}{2},\ \ \alpha_0=0,\ \ n=5.$$

Требуется найти корень $\alpha_1$. Имеем

$$u_5=[h^8-8h^6+21h^4-20h^2+5]\,hu'_{\alpha_0}.$$

Подлежащее решению уравнение имеет вид

$$h^8-8h^6+21h^4-20h^2+5=0.$$

Наименьший корень этого уравнения

$$h^2 = 0.381964.$$

Вычисление показывает, что

$$\alpha_0 = 5h = 3.09,$$

тогда как значение искомого корня с тремя верными знаками

$$3.14.$$

Наконец, заметим, что метода Ритца, имеющая приложение в вопросах приближенного вычисления характеристических чисел, может быть применена также к численному нахождению корней функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению.

§ **4. Вывод формулы (3).** Рассмотрим уравнение

$$\varphi(z) = t, \tag{14}$$

где $\varphi(z)$ функция, голоморфная внутри некоторой замкнутой области $G$. Пусть $u_k$ внутренняя точка этой области. Предположим далее, что $\varphi'(u_k) \neq 0$.* Пусть круг $C_k$ радиуса $r_k$ и с центром в $u_k$ расположен в области $G$. Пусть еще $F(z)$ обозначает функцию голоморфную в круге $C_k$.

Уравнение (14) представим в таком виде:

$$\varphi(z) - \varphi(u_k) = t - \varphi(u_k). \tag{15}$$

В силу того, что $\varphi'(u_k) \neq 0$, по основной теореме неявных функций, существует единственная функция $z$ от $t - \varphi(u_k)$, удовлетворяющая соотношению (15) и принимающая при $t = \varphi(u_k)$ значение $u_k$.

В силу сказанного

$$F(z) = \Phi[t - \varphi(u_k)], \tag{16}$$

где $F(z)$ переходит в $F(u_k)$ при $t = \varphi(u_k)$.

(15) и (16) позволяют написать

$$F(z) = \Phi[\varphi(z) - \varphi(u_k)]. \tag{17}$$

Производная $n$-го порядка по $z$ функции $F(z)$ выразится в виде

$$\frac{d^n}{dz^n} F(z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \Phi^{(m)}[\varphi(z) - \varphi(u_k)] \times$$

$$\times \sum_{\alpha=1}^{m} \binom{m}{\alpha} [\varphi(u_k) - \varphi(z)]^{m-\alpha} \frac{d^n}{dz^n} [\varphi(z) - \varphi(u_k)]^{\alpha}.$$

* Мы ниже всюду предполагаем, что $\varphi'(u_k)$ не обращается в нуль внутри контура $C_k$.

В частности вычисление дает:

$$\left[\frac{d}{dz}F(z)\right]_{z=u_k}=\left\{\frac{d}{dz}[\varphi(z)-\varphi(u_k)]\right\}_{z=u_k}\Phi'(0),$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}F(z)\right]_{z=u_k}=\left\{\frac{d^2}{dz^2}[\varphi(z)-\varphi(u_k)]\right\}_{z=u_k}\Phi'(0)+\left\{\frac{d^2}{dz^2}[\varphi(z)-\varphi(u_k)]^2\right\}_{z=u_k}\frac{\Phi''(0)}{1\cdot 2},$$

$$\left[\frac{d^3}{dz^3}F(z)\right]_{z=u_k}=\left\{\frac{d^3}{dz^3}[\varphi(z)-\varphi(u_k)]\right\}_{z=u_k}\Phi'(0)+\left\{\frac{d^3}{dz^3}[\varphi(z)-\varphi(u_k)]^2\right\}_{z=u_k}\frac{\Phi''(0)}{1\cdot 2}+$$
$$+\left\{\frac{d^3}{dz^3}[\varphi(z)-\varphi(u_k)]^3\right\}_{z=u_k}\frac{\Phi'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

и т. д.

Нетрудно удостовериться, что

$$\left\{\frac{d^n}{dz^n}[\varphi(z)-\varphi(u_k)]^n\right\}_{z=u_k}=n!\,[\varphi'(u_k)]^n$$

и что вышеполученная система уравнений имеет одно и только одно решение относительно

$$\Phi'(0),\quad \frac{\Phi''(0)}{1\cdot 2},\quad \frac{\Phi'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots,\quad \frac{\Phi^{(n)}(0)}{1\cdot 2\ldots n},$$

так как определитель этой системы равен

$$1!\,2!\,3!\ldots n!\,[\varphi'(u_k)]^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

и при $\varphi'(u_k)\neq 0$ отличен от нуля.

Таким образом мы находим:

$$\Phi^{(n)}(0)=\frac{\Delta_n(u_k)}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!\,[\varphi'(u_k)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}\tag{18}$$

где*

$$\Delta_n(u_k)=\begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & F'(z)\\ a_1^2 & a_2^2 & 0 & \ldots & 0 & F''(z)\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & 0 & F'''(z)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} & F^{(n-1)}(z)\\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_{n-1}^n & F^{(n)}(z)\end{vmatrix}_{z=u_k},$$

а

$$a_j^i=\left\{\frac{d^i}{dz^i}[\varphi(z)-\varphi(u_k)]^j\right\}_{z=u_k}.$$

* $\Delta_1(u_k)=F'(u_k)$.

Разлагая функцию

$$\Phi[t-\varphi(u_k)]$$

в ряд Маклорена, мы получим:

$$F(z)=\Phi(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[t-\varphi(u_k)]^n}{1\cdot 2\ldots n}\Phi^{(n)}(0). \tag{19}$$

Предположим, что $z=\beta_k$ есть простой корень уравнения (14), а $u_k$ приближенное значение этого корня. Для достаточно малых значений $|t-\varphi(u_k)|$ уравнение (14) будет иметь внутри контура $C_k$ один корень $\beta_k$. Разложение $F(\beta_k)$ будет иметь вид:

$$F(\beta_k)=\Phi(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[t-\varphi(u_k)]^n}{1\cdot 2\ldots n}\Phi^{(n)}(0). \tag{20}$$

При частном предположении

$$F(z)=z$$

получается формула

$$\beta_k=u_k+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{1!\,2!\ldots n!}\frac{[t-\varphi(u_k)]^n}{[\varphi'(u_k)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}\Delta_n'(u_k), \tag{21}$$

где для всякого целого значения $n\geqslant 2$

$$\Delta_n'(u_k)=\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \ldots & a_{n-1}^n \end{vmatrix},$$

а при $n=1$ $\Delta_1(u_k)=1$. Из формулы (21) при

$$\beta_k=\alpha_{\nu+1},\quad u_k=\bar{\alpha}_{\nu+1},\quad t=0\quad \text{и}\quad \varphi(u_k)=y(\bar{\alpha}_{\nu+1})$$

мы получим формулу (3).

Наконец, если $u_k=a_k$ есть один из простых корней уравнения

$$\varphi(z)=0,$$

будем иметь

$$F(\beta_k)=F(a_k)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1!\,2!\ldots n!}\frac{\Delta_n(a_k)}{[\varphi'(a_k)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}, \tag{22}$$

$$\beta_k=a_k+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{1!\,2!\ldots n!}\frac{\Delta'_n(a_k)}{[\varphi'(a_k)]^{\frac{n(n+1)}{2}}}. \tag{23}$$

Разложений вида (22) и (23) существует столько, сколько существует простых корней уравнения

$$\varphi(z)=0.$$

Если ограничиться при вычислениях первыми двумя членами ряда (21), будем иметь:

$$\beta_k \approx u_k + \frac{t-\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}.$$

К этой же формуле приводит нас правило Ньютона (метода приближенного решения уравнений), если $u_k$ есть приближенное значение какого-либо корня уравнения (14).

§ 5. **Сравнение ряда (20) с рядом Лагранжа.** Представим уравнение (14) в следующем виде:

$$z-u_k-\frac{z-u_k}{\varphi(z)-\varphi(u_k)}[t-\varphi(u_k)]=0. \tag{24}$$

Уравнение (24) имеет корень $z=u_k$ при $t=\varphi(u_k)$. Разложение функции $F(\beta_k)$ корня $\beta_k$ уравнения (24), стремящегося к $u_k$, когда $\varphi(u_k)$ стремится к $t$, по формуле Лагранжа будет:

$$F(\beta_k)=F(u_k)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[t-\varphi(u_k)]^n}{1\cdot 2\ldots n}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[F'(z)\left(\frac{z-u_k}{\varphi(z)-\varphi(u_k)}\right)^n\right]\right\}_{z=u_k}. \tag{25}$$

Приравнивая в разложениях (20) и (25) коэффициенты при одинаковых степенях $t-\varphi(u_k)$, мы получим:

$$\Delta_n(u_k)=1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!\,[\varphi'(u_k)]^{\frac{n(n+1)}{2}}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[F'(z)\left(\frac{z-u_k}{\varphi(z)-\varphi(u_k)}\right)^n\right]\right\}_{z=u_k}.$$

§ 6. **Условие сходимости рядов (20) и (21).** При посредстве леммы Руше устанавливаем, что, если вдоль $C_k$

$$|t-\varphi(u_k)|<|\varphi(z)-\varphi(u_k)|, \tag{26}$$

то уравнение (14) или тождественное с ним уравнение (24) будет иметь внутри $C_k$ столько корней, сколько имеет уравнение

$$\varphi(z)-\varphi(u_k)=0. \tag{27}$$

Здесь, как и выше, предполагаем, что $\varphi'(u_k)\neq 0$.

Пусть уравнение (27) имеет внутри $C_k$ один корень $u_k$. Пусть выполняется условие (26), тогда уравнение (14) также будет иметь один корень $\beta_k$ внутри $C_k$. Корень этот может быть вычислен при посредстве формулы (21).

Неравенству (26) в частных случаях можно придавать более удобоприменимый вид, если возможно найти наименьшее значение

$$|\varphi(z)-\varphi(u_k)|$$

вдоль $C_k$.

Пусть мы имеем на плоскости систему осей прямоугольных координат $xOy$, расположенных обычным образом. Пусть точка $z$ описывает окружность $C_k$ радиуса $r_k$ с центром в точке

$$u_k=b_k+id_k.$$

Пусть область, ограниченная окружностью $C_k$, расположена в области $G$, и все корни уравнения (27), кроме $u_k$, находятся вне $C_k$.

Очевидно, что вдоль $C_k$

(28) $$z=b_k+r_k\cos\theta+i[d_k+r_k\sin\theta],$$

где $\theta$ угол, образуемый направлением $u_kz$ с направлением прямой, проходящей через точку $u_k$ параллельно оси $Ox$.

Пусть

(29) $$\varphi(z)=f(r_k,\theta)+i\Psi(r_k,\theta)$$

и

(30) $$\varphi(u_k)=A+Bi.$$

Обозначим через $R$ модуль функции $\varphi(z)-\varphi(u_k)$, имеем

(31) $$R^2=[f(r_k,\theta)-A]^2+[\Psi(r_k,\theta)-B]^2.$$

Minimum $R$ относительно $\theta$ (т. е. при постоянном $r_k$) соответствует некоторому значению $\theta$, удовлетворяющему уравнению

(32) $$\frac{dR}{d\theta}=0.$$

Дифференцируя обе части (31) по $\theta$, получим:

(33) $$R\frac{dR}{d\theta}=[f(r_k,\theta)-A]\frac{\partial f(r_k,\theta)}{\partial\theta}+[\Psi(r_k,\theta)-B]\frac{\partial\Psi(r_k,\theta)}{\partial\theta}=0.$$

Далее из (29) имеем

(34) $$\varphi'(z)(z-u_k)=\frac{\partial\Psi(r_k,\theta)}{\partial\theta}-i\frac{\partial f(r_k,\theta)}{\partial\theta}.$$

(33) и (34) показывают, что $R$ может быть в частности minimum'ом при значениях $z$, удовлетворяющих уравнению

(35) $$\varphi'(z)=0.$$

Пусть

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_{n-1}$$

корни уравнения (35).

Величину $\alpha_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$ будем изображать точкой $M_\nu$. Ниже мы всюду предполагаем, что окружность $C_k$ не содержит внутри себя ни одной из точек

$$M_0, M_1, \ldots, M_\nu, \ldots, M_{n-1}.$$

Пусть $C_k$ проходит через точку $M_\nu$ и содержит внутри себя только лишь один какой-либо корень $\beta_k$ уравнения (14). Пусть последовательные производные* $R$ по $\theta$ до порядка $2n-1$, при $\theta = \theta_\nu$ ($\theta_\nu$ — угол, составленный направлением $u_k M_\nu$ с осью $Ox$), обращаются в нуль, а

(36) $$\left[\frac{d^{2n} R}{d\theta^{2n}}\right]_{\theta=\theta_\nu} > 0,$$

тогда $R$, в частности, может быть minimum'ом при

$$z = \alpha_\nu.$$

Допустим, что уравнение (33) не имеет других корней кроме

$$\theta = \theta_\nu.$$

Дифференцируя $2n-1$ раз по $\theta$ (32) и (34) и полагая $\theta = \theta_\nu$, в предположении что

$$\varphi'(\alpha_\nu) = \varphi''(\alpha_\nu) = \ldots = \varphi^{(2n-1)}(\alpha_\nu) = 0,$$

получим:

(37) $$(-1)^n \varphi^{(2n)}(\alpha_\nu)(\alpha_\nu - u_k)^{2n} = \left[\frac{\partial^{2n} f(r_k, \theta)}{\partial\theta^{2n}}\right]_{\theta=\theta_\nu} + i\left[\frac{\partial^{2n} \Psi(r_k, \theta)}{\partial\theta^{2n}}\right]_{\theta=\theta_\nu}.$$

Сверх того, вычисление показывает, что условие (36) будет выполнено, если

(38) $$[f(r_k, \theta_\nu] - A]\left[\frac{\partial^{2n} f(r_k, \theta)}{\partial\theta^{2n}}\right]_{\theta=\theta_\nu} + [\Psi(r_k, \theta_\nu) - B]\left[\frac{\partial^{2n} \Psi(r_k, \theta)}{\partial\theta^{2n}}\right]_{\theta=\theta_\nu} > 0.$$

При выполнении условия (38) неравенство (26) примет вид

(39) $$|t - \varphi(u_k)| < |\varphi(\alpha_\nu) - \varphi(u_k)|.$$

Если

$$\varphi(u_k),\ \varphi(\alpha_\nu),\ (\alpha_\nu - u_k)^{2n},\ \varphi^{(2n)}(\alpha_\nu)$$

действительны, то с помощью (29), (30) и (37), условие (38) перепишется так:

(40) $$(-1)^n \varphi^{(2n)}(\alpha_\nu)[\varphi(\alpha_\nu) - \varphi(u_k)] > 0.$$

* Предполагается существование производных $R$ по $\theta$ до порядка $2n$.

Если окружность $C_k$ проходит через несколько точек

$$M_0, M_1, \ldots, M_{n-1},$$

то $\alpha_\nu$ должна быть выбрана из ряда величин:

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \ldots, \alpha_{n-1},$$

так, чтобы удовлетворялись условия:

$$\begin{aligned} &|\varphi(\alpha_\nu)-\varphi(u_k)|\leqslant|\varphi(\alpha_0)-\varphi(u_k)|,\\ &|\varphi(\alpha_\nu)-\varphi(u_k)|\leqslant|\varphi(\alpha_1)-\varphi(u_k)|,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &|\varphi(\alpha_\nu-\varphi(u_k)|\leqslant|\varphi(\alpha_n)-\varphi(u_k)|. \end{aligned}$$

Пусть $Q(z)$ есть функция от $z$, голоморфная внутри $C_k$ и непрерывная вдоль $C_k$.

Имеем

$$Q^{(n-1)}(u_k)=\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{Q(z)\,dz}{(z-u_k)^n}. \tag{41}$$

Полагая

$$Q(z)=\left[\frac{z-u_k}{\varphi(z)-\varphi(u_k)}\right]^n F'(z),$$

мы можем представить выражение (41) в виде

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[F'(z)\left(\frac{z-u_k}{\varphi(z)-\varphi(u_k)}\right)^n\right]\right\}_{z=u_k}=\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{F'(z)\,dz}{[\varphi(z)-\varphi(u_k)]^n}.$$

Пусть будет $M$ верхняя граница модуля функции $F'(z)$, а $m$ — нижняя граница модуля $\varphi(z)-\varphi(u_k)$ вдоль $C_k$. Будем иметь

$$\operatorname{mod}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[F'(z)\left(\frac{z-u_k}{\varphi(z)-\varphi(u_k)}\right)^n\right]\right\}_{z=u_k}<\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{m^n}Mr_k.$$

Если под $R_n$ разуметь дополнительный член ряда (20), то придем к весьма простому выражению высшего предела модуля $R_n$ именно:

$$\operatorname{mod} R_n<\frac{Mr_k}{n}q^n[1+q+q^2+\ldots],$$

где

$$q=\operatorname{mod}\left[\frac{t-\varphi(u_k)}{m}\right].$$

Предполагая вдоль $C_k$ справедливость неравенства (26), мы будем иметь

$$q<1.$$

Следовательно получим

$$\operatorname{mod} R_n < \frac{Mr_k}{n} \frac{q^n}{1-q}.$$

Наконец, если $F(z)=z$, то для модуля $R_n$ ряда (21), мы получим:

(42) $$\operatorname{mod} R_n < \frac{r_k}{n} \frac{q^n}{1-q},$$

где

$$r_k = \operatorname{mod}[\alpha_\nu - u_k].$$

Во всех изложенных случаях при неограниченном возрастании $n$ остаточный член $R_n$ стремится к нулю.

§ 7. **Численные примеры.** Применим полученные выше результаты к двум примерам.

1°. Рассмотрим уравнение

$$ze^z = t.$$

Пусть

$$u_k = 0.$$

Имеем

$$\varphi(z) = ze^z, \ \varphi(u_k) = 0.$$

Вычисление показывает, что уравнение

$$\varphi'(z) = 0$$

имеет один корень

$$z = -1.$$

Рассмотрим еще выражение

$$R = \operatorname{mod}[ze^z] = r_k e^{r_k \cos\theta}.$$

Корни уравнения

$$\frac{dR}{d\theta} = -r_k^2 e^{r_k \cos\theta} \sin\theta = 0$$

суть:

$$0, \pi, 2\pi, \ldots$$

Чтобы

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} > 0,$$

необходимо положить

$$\theta_\nu = \pi.$$

Следовательно, имеем

$$\alpha_\nu = -1, \ r_k = 1.$$

Ряд, доставляющий искомый корень $\beta_0$, имеет вид

$$\beta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} t^n. \tag{43}$$

Поставим себе целью найти приближенное значение корня уравнения

$$xe^x = 0.1.$$

Имеем

$$t = 0.1.$$

Если просуммировать пять членов ряда (43) то получится

$$\beta_0 = 0.09028.$$

Переходя к оценке погрешности полученного результата, с помощью (42) находим, что абсолютная величина искомой погрешности не превосходит числа

$$0.000092.$$

На самом деле действительная ошибка по абсолютной величине значительно меньше предельной. Воспользовавшись тем обстоятельством, что при $t > 0$ ряд (43) становится знакопеременным, с помощью теоремы о знакопеременных рядах высший предел абсолютной величины погрешности не превзойдет числа

$$0.0000108.$$

2°. В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$z^m - pz = t, \qquad (m > 1)$$

где $m$ целое положительное число.

Пусть

$$u_k = 0.$$

Имеем

$$\varphi(z) = z^m - pz, \;\; \varphi(u_k) = 0.$$

Производная функции $\varphi(z)$ имеет выражение

$$mz^{m-1} - p.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$mz^{m-1} - p = 0. \tag{44}$$

Уравнение (44) имеет $m - 1$ корней, доставляемых формулой

$$\alpha_\nu = \sqrt[m-1]{\frac{|p|}{m}} \left[\cos\frac{\omega + 2\pi\nu}{m-1} + i\sin\frac{\omega + 2\pi\nu}{m-1}\right],$$

где $\nu$ принимает последовательно значения $0, 1, 2, \ldots, m-2$, а $\omega$ обозначает аргумент количества $p$.

Рассмотрим еще выражение

$$R^2 = r_k^2 \left\{ r_k^{2(m-1)} - 2\,|p|\, r_k^{m-1} \cos\left[(m-1)\theta - \omega\right] + |p^2| \right\}.$$

Уравнение

$$\frac{dR}{d\theta} = 0$$

имеет корни

$$\theta_\nu = \frac{\omega + \nu\pi}{m-1}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, (m-2)$$

Вычисление показывает, что при четных значениях $\nu$

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} > 0.$$

Внося значения $\alpha_\nu$ в (39) убеждаемся, что для сходимости ряда (21) должно быть

(45) $$\left| \frac{t^{m-1}}{p^m} \right| < \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m}.$$

Поставим себе целью найти приближенное значение корня уравнения

(46) $$x^3 - px - t = 0.$$

Формула (21) для этого случая принимает вид:

(47) $$\beta_0 = -\frac{t}{p} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{1+3s} E_s \left(\frac{t^2}{p^3}\right)^s,$$

где

$$E_0 = 1,\ E_s = \frac{(1+3s)\,3s \ldots (2s+2)}{1 \cdot 2 \ldots s}.$$

Напишем ряд (47) подробно:

(48) $$\beta_0 = -\frac{t}{p}\left[1 + \frac{t^2}{p^3} + 3\left(\frac{t^2}{p^3}\right)^2 + 12\left(\frac{t^2}{p^3}\right)^3 + 55\left(\frac{t^2}{p^3}\right)^4 + \cdots\right],$$

который в силу неравенства (45) сходится, если

$$\left|\frac{t^2}{p^3}\right| < \frac{4}{27}.$$

Если просуммировать $n-1$ членов ряда (47), то в силу (42) мы получим значение корня $\beta_0$ с абсолютной погрешностью меньшей

$$\operatorname{mod} \frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{n} \frac{\left(\frac{t}{2}\frac{3}{p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right)^n}{1 - \left|\frac{t}{2}\frac{3}{p}\sqrt{\frac{3}{p}}\right|}.$$

Легко проверить сходимость ряда (48) при

$$\left|\frac{t^2}{p^3}\right| = \frac{4}{27}.$$

Величина $\beta_0$, доставляемая в этом случае рядом (48), удовлетворяет уравнению (46), ибо

$$\lim_{\frac{t^2}{p^3} \to \frac{4}{27}} [\beta_0^3 - p\beta_0 - t] = 0.$$

Заметим, наконец, что при

$$\left|\frac{t^2}{p^3}\right| < \frac{4}{27}$$

уравнение

$$x^3 - px - t = 0$$

имеет три действительных корня, значения которых доставляются формулой Кардана в виде суммы мнимых кубических корней. В этом случае прибегают к тригонометрическому решению, требующему достаточного труда на вычислительную работу. Ряд (48) может иметь в таких случаях значительную практическую ценность.

Поставим себе целью найти приближенное значение корня уравнения

$$x^3 - 12x + 1 = 0.$$

Просуммировав три первых члена ряда (48), мы получим:

$$\beta_0 = 0.083382,$$

с абсолютной погрешностью меньшей

$$0.000008.$$

§ 8. **Вывод формулы (21) методой последовательных приближений.** Положим $t = 0$ и напишем ряд (21) подробно:

$$\beta_k = u_k - \frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)} - \frac{1}{1\cdot 2}\frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\left[\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]^2 - \tag{49}$$
$$- \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[3\left(\frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right)^2 - \frac{\varphi'''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]\left[\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]^3 - \ldots$$

Ряд этот, при выполнении условия сходимости, выражает некоторый корень уравнения

$$\varphi(z) = 0.$$

Мы теперь покажем, что разложение (49) может быть получено методой последовательных приближений, пользуясь формулой Ньютона.

Пусть $\varphi'(u_k) \neq 0$, а величина $\varphi(u_k)$ достаточно мала. С помощью формулы Ньютона мы имеем:

(50) $$\beta_k \approx u_k + h,$$

где

(51) $$h = -\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}.$$

Мы получим более точные значения корня $\beta_k$ из формулы

(52) $$\beta_k \approx u_k + h - \frac{\varphi(u_k + h)}{\varphi'(u_k + h)}.$$

Пусть разложение функции

$$\varphi[u_k + h]$$

в сходящийся степенной ряд есть

$$\varphi[u_k + h] = \varphi(u_k) + \frac{\varphi'(u_k)}{1} h + \frac{\varphi''(u_k)}{1 \cdot 2} h^2 + \frac{\varphi'''(u_k)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 + \cdots$$

Производная функции $\varphi[u_k + h]$ имеет выражение

$$\varphi'[u_k + h] = \varphi'(u_k) + \frac{\varphi''(u_k)}{1} h + \frac{\varphi'''(u_k)}{1 \cdot 2} h^2 + \frac{\varphi^{IV}(u_k)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 + \cdots$$

Следовательно, мы можем представить частное

$$\frac{\varphi[u_k + h]}{\varphi'[u_k + h]}$$

в виде степенного ряда

(53) $$C_0 + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \ldots,$$

сходящегося при значениях $h$, достаточно близких к нулю, причем для определения коэффициентов

$$C_0, C_1, \ldots, C_n$$

будем иметь формулы

(54) $$\frac{\varphi^{(n)}(u_k)}{1 \cdot 2 \ldots n} = \varphi'(u_k) C_n + \frac{\varphi''(u_k)}{1} C_{n-1} + \ldots + \frac{\varphi^{(n+1)}(u_k)}{1 \cdot 2 \ldots n} C_0,$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

По этим формулам мы найдем

$$C_0 = \frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)},$$

$$C_1 = 1 - \frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)} \frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)},$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \frac{\varphi'''(u_k)}{\varphi'(u_k)} \frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)} + \left[\frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]^2 \frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)} - \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}$$

и т. д.

Внося же эти величины в (52), мы получим разложение

$$\frac{\varphi(u_k + h)}{\varphi'(u_k + h)},$$

а затем будем иметь:

$$\beta_k = u_k - \frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)} - \frac{1}{1 \cdot 2}\frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\left[\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]^2 - \tag{55}$$
$$- \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left[3\left(\frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right)^2 - \frac{\varphi'''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]\left[\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]^3 - \ldots$$

Сличая этот ряд с рядом (49), замечаем равенство первых четырех членов.

Полагая

$$h = -\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)} - \frac{1}{1 \cdot 2}\frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\left[\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]^2,$$

представим частное

$$\frac{\varphi[u_k + h]}{\varphi'[u_k + h]}$$

в виде степенного ряда (53). Вычисляя значение $\beta_k$ и сличая полученный результат с формулой (49), заметим равенство первых шести членов. Этот процесс можно продолжать.

Полагая, например,

$$h = -\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)} - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\left[\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]^2 -$$
$$- \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left[3\left(\frac{\varphi''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right)^2 - \frac{\varphi'''(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]\left[\frac{\varphi(u_k)}{\varphi'(u_k)}\right]^3$$

и представив частное

$$\frac{\varphi[u_k + h]}{\varphi'[u_k + h]}$$

в виде степенного ряда (53), а затем вычисляя значение $\beta_k$ и сличая полученный результат с рядом (49), заметим равенство первых восьми членов и т. д.

Аналогично изложенному можно вывести формулу Лагранжа. В самом деле, пусть

$$z = a + \alpha f(z), \tag{56}$$

где $\alpha$ переменный параметр.

Уравнение (56) имеет при $\alpha = 0$ корень $z = a$. Пусть $\xi$ изображает некоторый корень уравнения (56). Принимаем $z_1 = a$ за приближенное значение этого корня. При возможности применения к решаемому уравнению методы итерации для следующих приближений мы получим:

$$z_2 = a + \alpha f(a),$$
$$z_3 = a + \alpha f[a + \alpha f(a)].$$

Пусть разложение функции

$$f[a+\alpha f(a)]$$

в сходящийся степенной ряд есть:

$$f[a+\alpha f(a)]=f(a)+\frac{\alpha}{1}f(a)f'(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}[f(a)]^2 f''(a)+\ldots$$

и, следовательно,

$$z_3=a+\frac{\alpha}{1}f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f(a)]^2+\ldots$$

Сличая полученный результат с рядом Лагранжа

(57) $$\xi=a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[f(a)]^n,$$

заметим равенство первых трех членов.

Принимая за приближенное значение $\xi$ величину

$$a+\frac{\alpha}{1}f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f(a)]^2$$

и внося ее в (56), будем иметь

(58) $$z_4=a+\alpha f\left\{a+\alpha f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f(a)]^2\right\}.$$

Разлагая

$$f\left\{a+\alpha f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f(a)]^2\right\}$$

в степенной ряд относительно $\alpha$, подставляем полученное разложение в выражение (58). Сличая же полученный результат с рядом (57), заметим равенство первых четырех членов.

Этот процесс можно продолжать. Полагая, например, что приближенное значение $\xi$ равно величине

$$a+\frac{\alpha}{1}f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f(a)]^2+\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2}{da^2}[f(a)]^3$$

и внося ее в правую часть уравнения (56), а затем разлагая выражение

$$f\left\{a+\frac{\alpha}{1}f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f(a)]^2+\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2}{da^2}[f(a)]^3\right\}$$

в степенной ряд относительно $\alpha$, имеем

$$z_5=a+\frac{\alpha}{1}f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f(a)]^2+\ldots$$

Путем сличения правой части $z_5$ с рядом (57), замечаем равенство первых пяти членов и т. д.

Ряды, получаемые от разложения функции

$$f\left[a+\frac{\alpha}{1}f(a)\right],$$

$$f\left\{a+\frac{\alpha}{1}f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[f(a)]^2\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

сходятся для достаточно малых значений $\alpha$.

Нетрудно вывести формулу Лагранжа в ее обычном виде:

$$F(\xi)=F(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\{F'(a)[f(a)]^n\}. \tag{59}$$

В самом деле, принимая соответственно за первое, второе, и т. д. приближения $\xi$

$$a+\alpha f(a),$$

$$a+\alpha f(a)+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}f^2(a),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и разлагая $F(\xi)$ в степенные ряды относительно $\alpha$, путем сличения полученных результатов с (59) заметим соответственно равенство первых двух членов, первых трех членов и т. д.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР.
14 февраля 1935.

### CH. E. MIKELADZE. SUR LES RACINES D'UNE FONCTION DÉTERMINÉE PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

RÉSUMÉ

Admettons qu'à une certaine valeur du paramètre $\lambda$ corresponde la fonction $y(x)$ satisfaisant à l'équation différentielle:

$$a(x)y''+b(x)y'+[\lambda+q(x)]y=0, \tag{1}$$

et aux conditions aux limites

$$y(c)=0,\quad y(d)=A.$$

Les fonctions $a(x)$, $b(x)$ $q(x)$ sont supposées continues dans l'intervalle

$$c\leqslant x\leqslant d, \qquad (d>c\geqslant 0)$$

$a(x)$ étant différente de zéro dans le même intervalle.

Admettons que l'équation

$$y(x)=0$$

ait $m$ racines réelles différentes

$$\alpha_0 \geqslant 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$$

renfermés entre $c$ et $d$. Dans le cas de $\alpha_{m-1}=d$ nous admettons $A=0$.

Désignons $\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}$ par $l_\nu$. Décomposons l'intervalle $l_\nu$ en $n$ parties égales

$$(l_\nu = nh).$$

Proposons nous de trouver par l'un des procédés exposés dans notre travail* «Sur la résolution numérique des équations intégrales», une solution de l'équation différentielle (1) satisfaisant aux conditions aux limites

$$y(\alpha_{\nu-1})=0, \quad y(\alpha_\nu)=0.$$

Dans l'expression de $y$ entreront $h$ et $\lambda$, grâce à quoi $y$ se présentera comme une fonction $y(h, \lambda)$; reste à déterminer la valeur de $y(h\,\lambda)$ au bout de l'intervalle $l_\nu$ de façon à ce que

$$y(h, \lambda)=0.$$

Cette condition nous fournira une certaine équation en $h$. La plus petite d'entre les racines de l'équation obtenue peut être adoptée comme valeur approchée de $\frac{l_\nu}{n}$.

Il suffit, évidemment, de savoir la racine $\alpha_0$ pour que aussitôt, par simple sommation, se détermine la racine $\alpha_1$. De façon analogue sont calculées les racines

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{m-1}.$$

Dans des buts pratiques il est plus commode de déterminer $l_\nu$ en portant de petites valeurs de $n$ et en posant ensuite

$$\bar{\alpha}_\nu = \alpha_{\nu-1} + l_\nu,$$

de préciser la racine cherchée à l'aide de la formule

$$\alpha_\nu = \bar{\alpha}_\nu - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1!\,2!\,3!\ldots n!} \frac{y^r(\bar{\alpha}_\nu)}{[y'(\bar{\alpha}_\nu)]^{\frac{r(r+1)}{2}}} \Delta_r(\alpha_\nu), \tag{2}$$

où

$$\Delta_r(\bar{\alpha}_\nu) = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & 0 & \ldots 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{r-1} & a_2^{r-1} & a_3^{r-1} & \ldots a_{r-1}^{r-1} \\ a_1^r & a_2^r & a_3^r & \ldots a_{r-1}^r \end{vmatrix},$$

$$a_j^i = \left\{ \frac{d^i}{dx^i} [y(x) - y(\bar{\alpha}_\nu)]^j \right\}_{x=\bar{\alpha}_\nu}$$

tandis que $\bar{\alpha}_\nu$ désigne la valeur approchée de $\alpha_\nu$.

* Bull. Acad. Sciences de l'URSS, 1935, № 2, p. 255.

La formule (2) est toujours valable pourvu que $y'(\overline{\alpha}_\nu) \neq 0$ et que $y(\overline{\alpha}_\nu)$ soit assez petite.

Soit $y(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un certain domaine fermé $G$. Soit $\overline{\alpha}_\nu$ un point à l'intérieur de ce domaine. Soit, de plus un cercle $C_k$ à payon $r_k$ ayant son centre en $\overline{\alpha}_\nu$, situé également à l'intérieur du domaine $G$.

Dans des cas particuliers la série (2) converge, si

$$|y(\overline{\alpha}_\nu)| < |y(a_\nu) - y(\overline{\alpha}_\nu)|,$$

où $a_\nu$ est la racine de l'équation

$$y'(z) = 0$$

la plus proche de $\overline{\alpha}_\nu$.

En faisant la sommation de $n-1$ membres de la série (2), le module de l'erreur ne dépassera pas la valeur de

$$\frac{r_k}{n} \frac{q^n}{1-q},$$

où

$$r_k = \operatorname{mod}[a_\nu - \alpha_\nu], \quad q = \operatorname{mod} \frac{y(\overline{\alpha}_\nu)}{m},$$

et $m$ est la limite inférieure du module $y(z) - y(\overline{\alpha}_\nu)$ le long de $C_k$.

Institut mathématique W. Stekloff
de l'Académie des Sciences
de l'URSS.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ НЬЮТОНОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. Д. ГРОДСКОГО

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

1. Общие ур-ния равновесия изотропного упругого твердого тела таковы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\Delta_2 u &= -aX \\ \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\Delta_2 v &= -aY \\ \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\Delta_2 w &= -aZ, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $u$, $v$, $w$ — проекции перемещения точки $M(x, y, z)$ тела,

$X$, $Y$, $Z$ — проекции объемной силы, действующей на массу этой точки, взятые на оси координат и отнесенные к единице массы,

$\rho$ — плотность тела вокруг той же точки или, точнее, отношение массы к ее объему,

$\Theta$ — кубическое расширение тела, т. е.

$$A=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{2}$$

$E$ — «модуль упругости»,

$\mu$ — «коэффициент поперечного сжатия»,

причем

$$a=2\,\frac{1-\mu}{E}\,\rho \tag{3}$$

и, наконец,

$$\Delta_2 F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \tag{4}$$

Так как речь идет о равновесии тела, то

$$X,\ Y,\ Z$$

не зависят явно от времени, т. е. суть функции только координат.

Положим:

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}, \tag{5}$$

где $\xi$, $\eta$, $\zeta$ — координаты любой переменной точки тела;

$$\dot{I}_1=\int\limits_{\omega}\frac{X(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\omega,\quad \dot{I}_2=\int\limits_{\omega}\frac{Y(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\omega,\quad \dot{I}_3=\int\limits_{\omega}\frac{Z(\xi,\eta,\zeta)}{r}d\omega, \tag{6}$$

а

$$\dot{I}=\frac{\partial\dot{I}_1}{\partial x}+\frac{\partial\dot{I}_2}{\partial y}+\frac{\partial\dot{I}_3}{\partial z}, \tag{7}$$

причем $\omega$ — объем всего изучаемого тела; затем примем

$$u=u_1+\frac{a}{4\pi}\dot{I}_1,\quad v=v_1+\frac{a}{4\pi}\dot{I}_2,\quad w=w_1+\frac{a}{4\pi}\dot{I}_3 \tag{8}$$

и

$$\theta_1=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}; \tag{9}$$

тогда, очевидно,

$$\theta=\theta_1+\frac{a}{4\pi}\dot{I}, \tag{10}$$

а потому подстановка (8) в ур-ния (1) приведет их к виду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\Delta_2 u_1&=-\frac{a}{4\pi(1-2\mu)}\frac{\partial\dot{I}}{\partial x}\\ \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\Delta_2 v_1&=-\frac{a}{4\pi(1-2\mu)}\frac{\partial\dot{I}}{\partial y}\\ \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}+\Delta_2 w_1&=-\frac{a}{4\pi(1-2\mu)}\frac{\partial\dot{I}}{\partial z},\end{aligned}\right\}$$

ибо, как известно:

$$\Delta_2\dot{I}_1=-4\pi X(x,y,z),\quad \Delta_2\dot{I}_2=-4\pi Y(x,y,z),\quad \Delta_2\dot{I}_3=-4\pi Z(x,y,z).$$

Итак, случай произвольных объемных сил всегда можно привести к случаю, когда такие силы «имеют потенциал».

**2.** На этом основании допустим дальше, что уже сами данные силы «имеют потенциал»

$$F(x,y,z),$$

так что

$$X \equiv \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \overline{Y} \equiv \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z \equiv \frac{\partial F}{\partial z}, \tag{11}$$

и положим

$$I = \int_{\omega} \frac{F(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\omega, \tag{12}$$

а

$$u = u_1 + \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi} \frac{\partial I}{\partial x}, \quad v = v_1 + \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi} \frac{\partial I}{\partial y}, \quad w = w_1 + \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi} \frac{\partial I}{\partial z} \tag{13}$$

где $\omega$ — некоторая гармоническая функция, так что $\Delta_2 \omega \equiv 0$; тогда

$$\theta \equiv \theta_1 + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi} \Delta_2 I \equiv \theta_1 - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} aF(x, y, z);$$

подстановка (13) в ур-ния (1) даст:

$$\frac{1}{1-2\mu}\left[\frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} aX\right] + \Delta_2 u_1 + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi} \frac{\partial \Delta_2 I}{\partial x} + \frac{\partial \Delta_2 \omega}{\partial x} = -aX$$

или

$$\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{a}{2(1-\mu)} X + \Delta_2 u_1 - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} aX = -aX,$$

т. е.

и точно так же

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + (1-2)\Delta_2 u_1 = 0 \\ &\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + (1-2\mu)\Delta_2 v_1 = 0 \\ &\frac{\partial \theta_1}{\partial z} + (1-2\mu)\Delta_2 w_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Итак, в любом случае мы можем в ур-ниях равновесия изотропного упругого твердого тела освободиться от членов, отвечающих объемным силам.

**3.** Положим теперь

$$u_1 \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad v_1 \equiv \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad w_1 \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial z}, \tag{15}$$

тогда получим:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + (1-2\mu)\frac{\partial \Delta_2 \alpha}{\partial x} = 0$$

и т. д.;

а интегрирование даст:

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\alpha &\equiv f(y,z)\\ \theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\beta &\equiv \varphi(z,x)\\ \theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\gamma &\equiv \psi(x,y),\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $f$, $\varphi$, $\psi$ — произвольные функции своих аргументов, при чем еще

$$\theta_1 \equiv \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}. \tag{17}$$

Но если определим какие-либо частные решения ур-ний

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} \equiv f(y,z), \quad \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} \equiv \varphi(z,x), \quad \frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} \equiv \psi(x,y)$$

(как известно, их можно представить под видом логарифмических потенциалов на плоскости) и затем положим:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{f_0}{1-2\mu}, \quad \beta = \beta_0 + \frac{\varphi_0}{1-2\mu}, \quad \gamma = \gamma_0 + \frac{\psi_0}{1-2\mu}, \tag{18}$$

то будет

$$\theta_1 \equiv \frac{\partial^2\alpha_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma_0}{\partial z^2}, \tag{19}$$

ибо $f_0$ не зависит от $x$, $\varphi_0$ — от $y$, и $\psi_0$ — от $z$; а кроме того

$$\Delta_2\alpha \equiv \Delta_2\alpha_0 + \frac{f}{1-2\mu}, \quad \Delta_2\beta \equiv \Delta_2\beta_0 + \frac{\varphi}{1-2\mu}, \quad \Delta_2\gamma \equiv \Delta_2\gamma_0 + \frac{\psi}{1-2\mu},$$

почему ур-ния (16), по подстановке в них вместо $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ их выражений (18), примут такой вид:

$$\theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\alpha_0 = 0, \quad \theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\beta_0 = 0, \quad \theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\gamma_0 = 0$$

и в то же время, очевидно:

$$u_1 \equiv \frac{\partial\alpha_0}{\partial x}, \quad v_1 \equiv \frac{\partial\beta_0}{\partial y}, \quad w_1 \equiv \frac{\partial\gamma_0}{\partial z}.$$

Это показывает, что можем в ур-ниях (17) отбросить функции $f$, $\varphi$, $\psi$, написав их под видом:

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\alpha &= 0\\ \theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\beta &= 0\\ \theta_1 + (1-2\mu)\Delta_2\gamma &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

**4.** Для интегрирования этих последних ур-ний положим:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &\equiv \psi_1 + A\left(x\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + z\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right)\\ \beta &\equiv \psi_2 + A\left(x\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + z\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right)\\ \gamma &\equiv \psi_3 + A\left(x\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + z\frac{\partial\psi_3}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где $A$ — некоторое постоянное (пока произвольное) число. Поступить так мы имеем право всегда, т. е. при любых функциях $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, так как, напр., два последних из равенств (21) дают:

$$\psi_2 \equiv (\beta - \alpha) + \psi_1, \quad \psi_3 = (\gamma - \alpha) + \psi_1, \qquad (22)$$

после чего из первого имеем:

$$\alpha \equiv \psi_1 + A\left(x\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + z\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) + Ay\frac{\partial(\beta-\alpha)}{\partial y} + Az\frac{\partial(\gamma-\alpha)}{\partial z},$$

так что по заданным произвольно функциям

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

функция $\psi_1$ определяется линейным ур-нием в частных производных первого порядка; по нахождении же $\psi_1$ получим выражения для $\psi_2$ и $\psi_3$ даже без надобности новых интегрирований — просто на основании равенств (22).

Из выражений (21) выводим, что

$$\theta_1 \equiv \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} \equiv (1+2A)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}\right) +$$
$$+ A\left(x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\Delta_2\psi_2}{\partial y} + z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial z}\right)$$

и, напр.,

$$\Delta_2\alpha \equiv \Delta_2\psi_1 + A\left(x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\Delta_2\psi_2}{\partial y} + z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial z}\right) + 2A\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}\right),$$

вследствие чего первое из ур-ний (20) примет следующий вид:

$$(1+2A)\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}\right) + A\left(x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\Delta_2\psi_2}{\partial y} + z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial z}\right) +$$
$$+ [(1-2\mu)\Delta_2\psi_1 + 2(1-2\mu)A]\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}\right) +$$
$$+ (1-2\mu)\left(x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\Delta_2\psi_2}{\partial y} + z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial r}\right) = 0$$

или

$$[1+4(1-\mu)A]\left(\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_3}{\partial z^2}\right)+2(1-\mu)A\left(x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+y\frac{\partial\Delta_2\psi_2}{\partial y}+z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial z}\right)+(1-2\mu)\Delta_2\psi_1=0;$$

воспользовавшись теперь произвольностью числа $A$ и сделав

$$A=-\frac{1}{4(1-\mu)}, \tag{23}$$

получим первое из следующих ур-ний

$$\left.\begin{aligned} 2(1-2\mu)\Delta_2\psi_1&=x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\Delta_2\psi_2}{\partial y}+z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial z}\\ 2(1-2\mu)\Delta_2\psi_2&=x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial y}+z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial z}\\ 2(1-2\mu)\Delta_2\psi_2&=x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\Delta_2\psi_2}{\partial y}+z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial z}\end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

5. Они прежде всего показывают, что

$$\Delta_2\psi_1\equiv\Delta_2\psi_2\equiv\Delta_2\psi_3,$$

почему они все три превращаются в одно — следующее

$$2(1-2\mu)\Delta_2\psi=x\frac{\partial\Delta_2\psi}{\partial x}+y\frac{\partial\Delta_2\psi}{\partial y}+z\frac{\partial\Delta_2\psi}{\partial z}, \tag{25}$$

из которого заключаем, что функция

$$\Delta_2\psi$$

однородна и «измерение» ее равно

$$2(1-2\mu);$$

обозначая ее через

$$\Phi(x, y, z),$$

должны, след., проинтегрировать ур-ния

$$\Delta_2\psi_1\equiv\Phi(x, y, z),\quad \Delta_2\psi_2\equiv\Phi(x, y, z),\quad \Delta_2\psi_3\equiv\Phi(x, y, z). \tag{26}$$

Обозначим через

$$\psi_0(x, y, z)$$

какой-либо частный интеграл ур-ния

$$\Delta_2\psi=\Phi(x, y, z),$$

так что

$$\Delta_2 \psi_0 \equiv \Phi(x, y, z), \tag{27}$$

и положим:

$$\psi_1 \equiv \varphi_1 + \psi_0, \quad \psi_2 \equiv \varphi_2 + \psi_0, \quad \psi_3 \equiv \varphi_3 + \psi_0; \tag{28}$$

тогда, во-первых, функции

$$\varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3$$

будут, очевидно, удовлетворять ур-нию Лапласа, так что

$$\Delta_2 \varphi_1 \equiv 0, \quad \Delta_2 \varphi_2 \equiv 0, \quad \Delta_2 \varphi_3 \equiv 0; \tag{29}$$

а во-вторых, можем функцию $\psi_0$ взять тоже однородной, но, кочечно, ее «измерение» будет уже равно

$$2(1 - 2\mu) + 2 = 4(1 - \mu),$$

почему будет

$$x\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + y\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + z\frac{\partial \psi_0}{\partial z} \equiv 4(1 - \mu)\psi_0. \tag{30}$$

Поэтому, напр., первое из равенств (21) даст:

$$\alpha \equiv (\varphi_1 + \psi_0) - \frac{1}{4(1-\mu)}\left[\left(x\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(x\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + y\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + z\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right)\right]$$

или, вследствие (30):

$$\alpha \equiv \varphi_1 - \frac{\Omega}{4(1-\mu)}$$

и точно так же

$$\left.\begin{aligned} \beta &\equiv \varphi_2 - \frac{\Omega}{4(1-\mu)} \\ \gamma &\equiv \varphi_3 - \frac{\Omega}{4(1-\mu)} \end{aligned}\right\}, \tag{31}$$

где

$$\Omega \equiv x\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi_3}{\partial z}. \tag{32}$$

Таким образом:

$$\left.\begin{aligned} u &\equiv \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ v &\equiv \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ w &\equiv \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{\partial z}\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial z}; \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

но так как функции $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ входят в эти выражения только под видом своих первых частных производных соответственно по $x$, $y$ или $z$, то можем положить

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \equiv \omega_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \equiv \omega_2, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \equiv \omega_3,$$

причем вместо выражений (33) получим окончательно такие:

$$\left.\begin{aligned} u &\equiv \omega_1 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ v &\equiv \omega_2 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ w &\equiv \omega_3 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где теперь

$$\Omega \equiv x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 \tag{35}$$

и, очевидно,

$$\Delta_2\,\omega_1 \equiv 0, \quad \Delta_2\,\omega_2 \equiv 0, \quad \Delta_2\,\omega_3 \equiv 0. \tag{36}$$

Кроме того

$$\theta \equiv \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right) - \frac{\Delta_2\,\Omega}{4(1-\mu)} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\Delta_2 I;$$

но (35) дает:

$$\Delta_2\,\Omega \equiv \left(x\Delta_2\,\omega_1 + 2\frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right) + \left(y\Delta_2\,\omega_2 + 2\frac{\partial \omega_2}{\partial y}\right) + \left(z\Delta_2\,\omega_3 + 2\frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right)$$

или, вследствие (36)

$$\Delta_2\,\Omega \equiv 2\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right), \tag{37}$$

а потому

$$\theta \equiv \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left[\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right) - aF(x, y, z)\right]. \tag{38}$$

**6.** Полагая, ради сокращения письма:

$$D \equiv \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}, \tag{39}$$

мы можем написать, что

$$\theta \equiv \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}(D - aF), \tag{40}$$

а затем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+\mu}{E}X_x = \frac{\mu}{2(1-\mu)}(D-aF) + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \\ + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1+\mu}{E}Y_z=\frac{1+\mu}{E}Z_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}+\frac{\partial\omega_3}{\partial y}\right)-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\partial z}+\\
+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial z}\\
\frac{1+\mu}{E}Z_x=\frac{1+\mu}{E}X_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x}+\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial z\partial x}+\\
+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial x}\\
\frac{1+\mu}{E}X_y=\frac{1+\mu}{E}Y_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}+\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}+\\
+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}.
\end{aligned}\right\}\qquad(42)$$

Обозначая через

$$p,\ q,\ r$$

косинусы углов направления $\bar{n}$ с осями координат, а через $N$ — напряжение на бесконечно-малой плоской площадке, заключающей точку $M(x, y, z)$ внутри себя и перпендикулярной к направлению $\bar{n}$, получим:

$$\frac{1+\mu}{E}N_x=\frac{\mu}{2(1-\mu)}p(D-aF)+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\frac{\partial\omega_1}{\partial y}+r\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+r\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right)-\frac{1}{4(1-\mu)}\left(p\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+q\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}+r\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial z}\right)+$$

$$+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\left(p\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+q\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial y}+r\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial z}\right)+\left(p\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+q\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+r\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial z}\right)\ \text{и т. д.,}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1+\mu}{E}N_x=\frac{\mu}{2(1-\mu)}p(D-aF)+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+\right.\\
\left.+r\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right)+\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial n}\left(\Omega-\frac{1-2\mu}{2\pi}aI\right)+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial n}\\
\frac{1+\mu}{E}N_y=\frac{\mu}{2(1-\mu)}q(D-aF)+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial y}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\right.\\
\left.+r\frac{\partial\omega_3}{\partial y}\right)-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial y\partial n}\left(\Omega-\frac{1-2\mu}{2\pi}aI\right)+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial n}\\
\frac{1+\mu}{E}N_z=\frac{\mu}{2(1-\mu)}r(D-aF)+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_3}{\partial n}+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial z}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial z}+\right.\\
\left.+r\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial z\partial n}\left(\Omega-\frac{1-2\mu}{2\pi}aI\right)+\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial n},
\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

откуда еще выводим, что

$$\frac{1+\mu}{E}N_n = \frac{\mu}{2(1-\mu)}(D-aF) + \frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial n} + q\frac{\partial\omega_2}{\partial n} + r\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[p\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + q\frac{\partial\omega_1}{\partial y} + r\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right) + q\left(p\frac{\partial\omega_2}{\partial x} + q\frac{\partial\omega_2}{\partial y} + r\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right) +\right.$$

$$\left. + r\left(p\frac{\partial\omega_3}{\partial x} + q\frac{\partial\omega_3}{\partial y} + r\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)\right] - \frac{1}{4(1-\mu)}\left(p\frac{\partial^2}{\partial x\partial n} + q\frac{\partial^2}{\partial y\partial n} +\right.$$

$$\left. + r\frac{\partial^2}{\partial z\partial n}\right)\left(\Omega - \frac{1-2\mu}{2\pi}aI\right) + \left(p\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial n} + q\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial n} + r\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial n}\right)$$

или

$$\begin{aligned}\frac{1+\mu}{E}N_n = \frac{\mu}{2(1-\mu)}(D-aF) + \left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial n} + q\frac{\partial\omega_2}{\partial n} + r\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right) + \\ - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\Omega - \frac{1-2\mu}{2\pi}aI\right) + \frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}.\end{aligned} \tag{44}$$

**7.** Предположим, что нам заданы выражения перемещений всех частиц тела, лежащих на его поверхности $S$, так что

$$u_s \equiv f(x, y, z) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad v_s \equiv \varphi(x, y, z) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad w_s \equiv \psi(x, y, z) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{45}$$

где под видом членов $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ выделены те части этих перемещений, которые «имеют потенциал» $\Phi(x, y, z)$ в предположении, что точка $(x, y, z)$ может перемещаться не только по поверхности $S$, но как угодно в пространстве. Из выражений (34) выводим, что

$$xu + yv + zw \equiv \Omega - \frac{1}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right) +$$

$$+\frac{1-2\mu}{1(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\left(x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z}\right) + \left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y} + z\frac{\partial\omega}{\partial z}\right),$$

а след., на поверхности $S$ тела будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_s - \frac{1}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_s + \left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y} + z\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)_s \equiv \\ \equiv (xf + y\varphi + z\psi)_s - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\left(x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z}\right) + \\ + \left(x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right),\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

где правая часть является известной нам функцией координат.

Подчинив функцию $\Omega$ следующему граничному условию

$$\Omega_s \equiv (xf + y\varphi + z\psi)_s, \tag{47}$$

придем еще к равенству:

$$\left. \begin{aligned} \left(x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y} + z\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)_s \equiv \left(x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_s - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\left(x\frac{\partial I}{\partial x} + \right. \\ \left. + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z}\right)_s + \frac{1}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_s; \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

в то же время знаем, что $\omega$ есть гармоническая функция, а из ур-ний (35) и (36) выводим, что:

$$\Delta_2\Delta_2\Omega \equiv \Delta_2\left(2\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + 2\frac{\partial\omega_2}{\partial y} + 2\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right) \equiv 2\left(\frac{\partial\Delta_2\,\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\Delta_2\,\omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\Delta_2\,\omega_3}{\partial z}\right),$$

т. е.

$$\Delta_2\Delta_2\Omega \equiv 0, \tag{49}$$

так что $\Omega$ есть функция бигармоническая.

Если мы сумеем найти эту последнюю на основании «граничного» условия (47), то дальше должны будем найти гармоническую функцию $\omega$ на основании «граничного» условия (48), в котором правая часть теперь представит тоже функцию известную; после этого сможем определить гармонические же функции $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, основываясь на «граничных» условиях:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1)_s &= \frac{1}{4(1-\mu)}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)_s - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_s - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_s + \\ &\qquad + [f(x, y, z)]_s + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_s \\ (\omega_2)_s &= \frac{1}{4(1-\mu)}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)_s - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)_s - \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_s + \\ &\qquad + [\varphi(x, y, z)]_s + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_s \\ (\omega_3)_s &= \frac{1}{4(1-\mu)}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)_s - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\left(\frac{\partial I}{\partial z}\right)_s - \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)_s + \\ &\qquad + [\psi(x, y, z)]_s + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_s \end{aligned} \right\} \tag{50}$$

что требует решения трех самостоятельных так называемых «задач Дирихле».

**8.** В связи с только что изложенным возникает вопрос: вполне ли определяется функция $\Omega$ ур-ми (47) и (49)? Как известно, задание величин перемещений $u_s$, $v_s$, $w_s$ всех граничных точек тела определяет вполне, т. е. единствен-

ным образом и перемещения всех внутренних частиц тела, так что в ур-ниях (34) или равносильных им следующих:

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial x} &\equiv u - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial x} \\ \omega_2 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial y} &\equiv v - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial y} \\ \omega_3 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial z} &\equiv w - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

правые части будут вполне определенными функциями координат; предположим, что сами функции

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega$$

а след., и функция $\Omega$ определяются отсюда не единственным образом, и пусть две возможных системы решений ур-ний (48) равны соответственно:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega \quad \text{и} \quad \omega_1+\varphi_1, \quad \omega_2+\varphi_2, \quad \omega_3+\varphi_3, \quad \omega+\varphi;$$

тогда, конечно, соответствующие выражения функции $\Omega$ будут:

$$\Omega \quad \text{и} \quad \Omega+\Phi,$$

где

$$\Phi \equiv x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3,$$

при чем из ур-ний (51) вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \equiv 0, \quad \varphi_2 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \equiv 0, \\ \varphi_3 - \frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Эти ур-ния показывают, что непременно должно считать функции

$$\varphi_1 \equiv 0, \quad \varphi_2 \equiv 0, \quad \varphi_3 \equiv 0,$$

ибо по самому существу их определения они не могут быть соответственными частными производными от одной и той же функции; но в таком случае и

$$\Phi \equiv 0,$$

после чего получаем, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} \equiv 0,$$

т. е.

$$\varphi \equiv \text{пост.}$$

Таким образом ответ на поставленный выше вопрос получается утвердительный при условии, что в функциях

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$$

нет членов, являющихся производными по соответственным координатам от одной и той же функции таковых.

9. Предположим теперь, что нам заданы проекции

$$N_x,\ N_y,\ N_z$$

напряжений сил, действующих на любую точку поверхности $S$ тела. Тогда «граничные» условия задачи примут вид:

$$\frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{2(1-\mu)}p(D-aF)+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+r\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial n}-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial n}\left(\Omega-\frac{1-2\mu}{2\pi}aI\right)\right\}_s=N_x \quad \text{и т. д.,}$$

что можем переписать еще так:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{2(1-\mu)}pD+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+r\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right)+\right.\\
&\left.-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial n}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial n}\right\}_s=N_x-\frac{Ea}{2(1-\mu^2)}\left[-\mu X+\frac{1-2\mu}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial n}\right]_s\\
&\frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{2(1-\mu)}qD+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial y}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+r\frac{\partial\omega_3}{\partial y}\right)+\right.\\
&\left.-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y\partial n}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial n}\right\}_s=N_y-\frac{Ea}{2(1-\mu)^2}\left[-\mu Y+\frac{1-2\mu}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial y\partial n}\right]_s\\
&\frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{2(1-\mu)}rD+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_3}{\partial n}+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial z}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial z}+r\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)+\right.\\
&\left.-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial z\partial n}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial n}\right\}_s=N_z-\frac{Ea}{2(1-\mu^2)}\left[-\mu Z+\frac{1-2\mu}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial z\,\partial n}\right]_s.
\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Эти ур-ния показывают, что задача о равновесии изотропного упругого твердого тела при наличии «объемных» сил сводится по существу к задаче того же рода в отсутствии таких сил, с условием замены поверхностных напряжений

$$N_x,\ N_y,\ N_z$$

соответственно разностями

$$N_x-\frac{aE}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{1-2\mu}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial n}-\mu X\right]_s,\quad N_y-\frac{aE}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{1-2\mu}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial y\partial n}-\mu Y\right]_s,$$

и

$$N_z-\frac{aE}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{1-2\mu}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial z\partial n}-\mu Z\right]_s. \quad (54)$$

**10.** Применяя метод, указанный свыше 25 лет назад нашим акад. А. Н. Крыловым в его статье: «Über die erzwungenen Schwingungen von gleichformigen elastischen Stäben (см. том 61 «Mathematische Annalen), можно, наоборот, избавиться от давлений на поверхность изучаемого упругого тела... Именно, предположим вокруг этого тела бесконечно-тонкую оболочку, плотно повсюду прилегающую к его поверхности, а в точке $M(x, y, z)$ имеющую толщину $h_M$, при чем плотность массы этой оболочки одинакова с плотностью $\rho$ самого тела, а частицы ее подвергнуты действиям «объемных» сил

$$X_s,\ Y_s,\ Z_s,$$

подчиненных тому требованию, чтобы силы, действующие на призматический элемент массы оболочки, имеющий основанием площадку $\Delta S$ поверхности тела, а высотою — ее толщину $h_M$ в этом месте, были бы соответственно равны силам поверхностного давления на эту площадку $\Delta S$; ясно, что тогда мы можем эти поверхностные давления откинуть, заменив их вновь введенными объемными силами $X_s$, $Y_s$, $Z_s$, с подведением толщины $h$ повсюду к нулю, благодаря чему обратится в нуль и прибавочная масса всей названной оболочки. Указанное требование выразится, очевидно, равенствами:

$$N_x \cdot \Delta S = \rho \int_0^h X_s \cdot \Delta S \cdot dh, \quad N_y \cdot \Delta S = \rho \int_0^h Y_s \cdot \Delta S \cdot dh,$$

$$N_z \cdot \Delta S = \rho \int_0^h Z_s \cdot \Delta S \cdot dh$$

или

$$N_x = \rho \int_0^h X_s \cdot dh, \quad N_y = \rho \int_0^h Y_s \cdot dh, \quad N_z = \rho \int_0^h Z_s \cdot dh. \tag{55}$$

Применяя после этого указанный выше (№ 1) прием, положим еще

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_{1s} = \int_s ds \int_0^h \frac{X_s(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, dh, \quad \dot{I}_{2s} = \int_s ds \int_0^h \frac{Y_s(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, dh, \\ \dot{I}_{3s} = \int_s ds \int_0^h \frac{Z_s(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, dh \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

и

$$\dot{I}_{0s} = \frac{\partial \dot{I}_{1s}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{I}_{2s}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{I}_{3s}}{\partial z}, \tag{57}$$

а затем

$$\left.\begin{array}{c} u = u_1 + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{a}{4\pi}\dot{I}_{1s}, \quad v = v_1 + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial y} + \\ + \frac{a}{4\pi}\dot{I}_{2s}, \quad w = w_1 + \ldots, \end{array}\right\} \tag{58}$$

где интеграл $I$ имеет выражение (12), указанное в № 2-м.

Ур-ния равновесия будут иметь теперь такой вид:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \Delta_2 u = -aX - aX_s, \quad \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \Delta_2 v = -aY - aY_s, \\ \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \Delta_2 w = -aZ - aZ_s, \end{array}\right\} \tag{59}$$

при чем функции $X_s$, $Y_s$, $Z_s$ равны нулю повсюду внутри самого изучаемого тела, за исключением точек введенной нами выше бесконечно тонкой оболочки его, в которой, наоборот, функции $X$, $Y$, $Z$ можно считать (ради сохранения непрерывности потенцирующей субстанции во всем — вместе и с названной оболочкой — объеме тела) существующими и определяемыми теми же заданными выражениями; поэтому подстановка выражений (58) преобразует ур-ния (59) в такие:
сначала

$$\theta = \theta_1 - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}aF + \frac{a}{4\pi}\dot{I}_{0s}, \tag{60}$$

где

$$\theta_1 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}, \tag{9}$$

а затем:

$$\left[\frac{1}{1-2\mu}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{d}{4\pi}\frac{\partial\dot{I}_{0s}}{\partial x}\right) - \frac{a}{2(1-\mu)}X\right] +$$

$$+ \left[\Delta_2 u_1 - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}aX + \frac{a}{4\pi}\Delta_2\dot{I}_{1s}\right] = -aX - aX_s \quad \text{и т. д.;}$$

но в точках внутри самого тела мы имеем

$$X_s \equiv 0, \quad Y_s \equiv 0, \quad Z_s \equiv 0,$$

а в то же время, как известно:

$$\Delta_2\dot{I}_{1s} \equiv 0, \quad \Delta_2\dot{I}_{2s} \equiv 0, \quad \Delta_2\dot{I}_{3s} \equiv 0, \tag{61}$$

тогда как для точек самой оболочки будет

$$\Delta_2\dot{I}_{1s} \equiv -4\pi X_s, \quad \Delta_2\dot{I}_{2s} \equiv -4\pi Y_s, \quad \Delta_2\dot{I}_{3s} \equiv -4\pi Z_s; \tag{62}$$

поэтому полученные от подстановки ур-ния напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\Delta_2 u_1 &= -\frac{1}{1-2\mu}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial \dot{I}_{0s}}{\partial x}\\ \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\Delta_2 v_1 &= -\frac{1}{1-2\mu}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial \dot{I}_{0s}}{\partial y}\\ \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}+\Delta_2 w_1 &= -\frac{1}{1-2\mu}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial \dot{I}_{0s}}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

Итак, случай равновесия упругого тела, подверженного действию как «объемных» сил, так и поверхностных давлений, можем всегда свести к случаю равновесия тела, находящегося под влиянием только «объемных» сил, имеющих потенциал.

**11.** При этом, предполагая, что «потенцируемая» точка $M(x, y, z)$ не бесконечно-близка к его поверхности, можем, применяя «первую теорему о средних», равенствам (54) дать следующий вид:

$$\dot{I}_{1s} = \int\limits_s \frac{1}{r_{\text{средн.}}}\left[\int\limits_0^h X_s(\xi, \eta, \zeta)\, dh\right] dS \quad \text{и т. д.}$$

или, вследствие равенств (53), такой:

$$\dot{I}_{1s} = \frac{1}{\rho}\int\limits_S \frac{N_x(\xi, \eta, \zeta)}{r_{\text{средн.}}} dS \quad \text{и т. д.};$$

а так как окончательный результат мы получаем переходя к пределу при подведении $h$ повсюду к нулю, то это даст:

$$\left.\begin{aligned}\dot{I}_{1s} = \frac{1}{\rho}\int\limits_S \frac{N_x(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS, \quad \dot{I}_{2s} = \frac{1}{\rho}\int\limits_S \frac{N_y(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS,\\ \dot{I}_{3s} = \frac{1}{\rho}\int\limits_S \frac{N_z(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS,\end{aligned}\right\} \quad (64)$$

так что изложенный выше метод состоит по существу в использовании Ньютонова потенциала поверхностных давлений на тело, распространенного по поверхности $S$ этого тела. (Введенное выше предположение, что точка $M(x, y, z)$ не бесконечно-близка к этой поверхности, отпадает, очевидно, само собою в пределе — при доведении $h$ до нуля).

Так как формулы (55) дают:

$$R_x = \rho (X_s)_{\text{средн.}} \cdot h \quad \text{и т. д.}$$

или

$$(X_s)_{\text{средн.}} = \frac{R_x}{\rho h} \quad \text{и т. д.,} \tag{65}$$

то

$$(X_s)_{\text{средн.}}, \quad (Y_s)_{\text{средн.}}, \quad (Z_s)_{\text{средн.}}$$

а тем более

$$(X_s)_{\text{наиб.}}, \quad (Y_s)_{\text{наиб.}}, \quad (Z_s)_{\text{наиб.}}$$

растут безгранично вместе с $\frac{1}{h}$, но, как видно из выражений (64), в окончательных результатах никаких бесконечностей от этого не появляется...

**12.** Обратимся теперь к ур-ниям (63)... Опуская в них значки «1» для упрощения письма, мы вернемся к ур-ниям (1), но *при предположении, что «объемные» силы «имеют потенциал»*, т. е. *выполняются равенства* (11), *и что поверхностных давлений на тело не существует.*

Вследствие этого последнего обстоятельства «граничные» условия (53), по умножении их на

$$2\,\frac{1-\mu^2}{E},$$

примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\left[p\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)_s+(1-\mu)\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+\left(p\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\,\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+r\,\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right)\right]_s+\right.\\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s\equiv a\mu\,(pF)_s-\frac{1-2\mu}{4\pi}\,a\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial n}\right)_s, \text{ и т. д.,} \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

принимая же во внимание выражение (38), можно написать их еще и так:

$$\left.\begin{aligned} &2\mu\,\frac{1-\mu}{1-2\mu}(p\theta)_s+(1-\mu)\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+\left(p\,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\,\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+r\,\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right)\right]_s+\\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s\equiv-\frac{1-2\mu}{4\pi}\,a\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial n}\right)_s, \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

причем в обоих случаях значек «$S$» внизу показывает, что величину соответствующей функции должно вычислять для точек, лежащих на поверхности $S$ тела.

По этому поводу необходимо сейчас же отметить, что такое вычисление* для

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial n}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial y\,\partial n}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial z\,\partial n}$$

* Также и для других функций, которые, подобно этим трем, *разрываются* при переходе точки с одной стороны поверхности на другую.

следует производить не для точек, сразу взятых на поверхности $S$, а в виде пределов, получающихся при подведении точки $(x, y, z)$ изнутри тела к этой поверхности, так как сами равенства (66) или (67) выведены из формул (43), относящихся к внутренним точкам тела.

В ур-ниях (66) или (67) имеем четыре, подлежащих определению, функции

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3 \text{ и } \omega,$$

тогда как число тех или других ур-ний равно только трем; это, как будто бы, позволяет внести некоторый произвол в определение этих функций. Однако, приняв во внимание полную определенность перемещений частиц тела, создаваемых определенной системой сил, и существенное различие свойств функций

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3$$

— с одной стороны, и членов

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial z}$$

— с другой, заключаем, что выражения, получаемые для названных четырех функций на основании ур-ний (66) или (67), должны быть вполне определенными-единственными (функция $\omega$ может, конечно, содержать постоянное произвольное слагаемое, так как таковое не влияет на величины $u$, $v$, $w$).

Отметим еще, что «граничные» условия в форме (67) показывают, что в ур-ниих (66) нельзя, вообще говоря, допустить предположения, что

$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\omega_2}{\partial y} + \frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)_s \equiv F_s,$$

ибо это было бы равносильно допущению, что «кубическое расширение» $\theta$ обращается в нуль во всех точках поверхности $S$ тела.

**13.** Так как:

$$\Omega \equiv x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3, \tag{35}$$

то

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} \equiv \omega_1 + x\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + y\frac{\partial\omega_2}{\partial x} + z\frac{\partial\omega_3}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial n} \equiv \frac{\partial\omega_1}{\partial n} + \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial\omega_1}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial\omega_2}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial\omega_3}{\partial x} + x\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x\,\partial n} + y\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x\,\partial n} + z\frac{\partial^2\omega_3}{\partial x\,\partial n};$$

но на поверхности $S$ тела мы имеем, что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial n}\right)_s = p_s, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial n}\right)_s = q_s, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial n}\right)_s = r_s,$$

а след.,

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial n}\right)_s = \left[\frac{\partial \omega_1}{\partial n} + \left(p\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + q\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + r\frac{\partial \omega_3}{\partial x}\right)\right]_s + \left[x\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial n} + y\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial n} + z\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial n}\right]_s,$$

и т. д.;

поэтому ур-ния (67) можем написать еще в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &2\mu\frac{1-\mu}{1-2\mu}(p\theta)_s - (1-\mu)\left(x\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial n} + y\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial n} + z\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial n}\right)_s + \\ &+ \frac{1-2\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial n}\right)_s + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial n}\right)_s = -\frac{1-2\mu}{4\pi}a\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial n}\right)_s, \text{ и т. д.,} \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

а также и в таком:

$$\left.\begin{aligned} &2\mu\frac{1-\mu}{1-2\mu}(p\theta_s) + \frac{1-2\mu}{2}\left[\frac{\partial \omega_1}{\partial n} + \left(p\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + q\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + r\frac{\partial \omega_3}{\partial x}\right)\right]_s - \\ &+ \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial n} + y\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x \partial n} + z\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial x \partial n}\right)_s + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial n}\right)_s = \\ &= -\frac{1-2\mu}{4\pi}a\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial n}\right)_s, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Умножая ур-ния каждой из этих систем соответственно на

$$p_s, \; q_s, \; r_s$$

и складывая произведения, получим еще

$$\left.\begin{aligned} &2\mu\frac{1-2\mu}{1-\mu}\theta_s - (1-\mu)\left(x\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial n^2} + y\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial n^2} + z\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial n^2}\right)_s + \frac{1-2\mu}{2}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial n^2}\right)_s + \\ &+ 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\right)_s = -\frac{1-2\mu}{4\pi}a\left(\frac{\partial^2 I}{\partial n^2}\right)_s, \quad \text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &2\mu\frac{1-\mu}{1-2\mu}\theta_s + (1-2\mu)\left(p\frac{\partial \omega_1}{\partial n} + q\frac{\partial \omega_2}{\partial n} + r\frac{\partial \omega_3}{\partial n}\right) - \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial n^2} + \right. \\ &\left. + y\frac{\partial^2 \omega_2}{\partial n^2} + z\frac{\partial^2 \omega_3}{\partial n^2}\right)_s + 2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\right)_s = -\frac{1-2\mu}{4\pi}a\left(\frac{\partial^2 I}{\partial n^2}\right)_s \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

**14.** Из ур-ний (69) вытекает, что, если мы сумеем найти три гармонических функции $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ на основании граничных условий

$$\left.\begin{aligned} &(1-\mu)\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial n}\right)_s + \mu\left[p\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right)\right]_s = \mu a(X)_s \\ &(1-\mu)\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial n}\right)_s + \mu\left[q\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right)\right]_s = \mu a(Y)_s \\ &(1-\mu)\left(\frac{\partial \omega_3}{\partial n}\right)_s + \mu\left[r\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z}\right)\right]_s = \mu a(Z)_s, \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

то, составив затем выражение функции $\Omega$ по формуле (35), будем еще иметь, что

$$(1-\mu)\left[2\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial n}-\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)\right]_s+$$

$$+\frac{1-2\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial n}\left(\Omega+\frac{a}{2\pi}I\right)_s\equiv 0 \quad \text{и т. д.}$$

или

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1-\mu)\left[2\frac{\partial\omega}{\partial n}-\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)\right]+\frac{1-2\mu}{2}\frac{\partial}{\partial n}\left(\Omega+\frac{a}{2\pi}I\right)\right\}\right\}_s\equiv 0,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left\{(1-\mu)\left[2\frac{\partial\omega}{\partial n}-\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)\right]+\frac{1-2\mu}{2}\frac{\partial}{\partial n}\left(\Omega+\frac{a}{2\pi}I\right)\right\}\right\}_s\equiv 0$$

и

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left\{(1-\mu)\left[2\frac{\partial\omega}{\partial n}-\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)\right]+\frac{1-2\mu}{2}\frac{\partial}{\partial n}\left(\Omega+\frac{a}{2\pi}I\right)\right\}\right\}_s\equiv 0,$$

так что функция

$$(1-\mu)\left[2\frac{\partial\omega}{\partial n}-\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)\right]+\frac{1-2\mu}{2}\frac{\partial}{\partial n}\left(\Omega+\frac{a}{2\pi}I\right)$$

сохраняет постоянную величину во всех точках поверхности $S$ тела; включая эту постоянную в искомую функцию $\omega$, можем, след., написать, что

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)_s\equiv\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)_s-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial n}\right)_s+\frac{a}{4\pi}\left(\frac{\partial I}{\partial n}\right)_s\right]. \quad (76)$$

Таким образом решение задачи о равновесии тела в этом случае закончится отысканием гармонической функции

$$\omega$$

по известным нам значениям ее производной по нормали к поверхности $S$ тела во всех точках этой поверхности, что составляет, как известно, содержание так наз. «задачи Неймана».

**15.** В случае наличия поверхностных давлений

$$N_x,\ N_y,\ N_z$$

и несуществования, наоборот, «объемных» сил будем иметь, что

$$\theta\equiv\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right), \quad (74)$$

а «граничные» условия выразятся ур-ями:

$$\frac{2\mu}{1-2\mu}(p\theta)_s+\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)\right]_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s+$$

$$+2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s\equiv 2\frac{1+\mu}{E}N_x\equiv 2\frac{1+\mu}{E}\left[f(x,y,z)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]$$

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mu}{1-\mu}\left[p\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)\right]_s+\left[\frac{\partial\omega_1}{\partial n}-\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)\right]_s+\\+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s+2\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s\equiv 2\frac{1+\mu}{E}\left[f(x,y,z)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]_s,\quad \text{и т. д.}\end{aligned}\right\}\quad(75)$$

Определив гармонические функции $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ на основании «граничных» условий

$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial n}\right)_s+\frac{\mu}{1-\mu}\left[p\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)\right]_s\equiv 2\frac{1+\mu}{E}f(x,y,z)\quad \text{и т. д. (76),}$$

найдем функцию $\omega$ на основании «граничного» равенства:

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)_s\equiv\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)-\frac{1-2\mu}{4(1-\mu)}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial n}\right)_s+\frac{1+\mu}{E}\Phi_s.\quad(77)$$

**16.** В частном случае, когда, при отсутствии поверхностных давлений на тело, его поверхность $S$ есть «поверхность уровня» для «объемных» сил, так что их потенциальная функция $F$ сохраняет постоянную величину во всех точках этой поверхности, мы можем эту постоянную $F_s$, за счет «постоянной произвольной» в составе функции $F$, обратить в нуль. В таком случае ур-ния (72) будут тождественно удовлетворены, если возьмем

$$\omega_1\equiv 0,\quad \omega_2\equiv 0,\quad \omega_3\equiv 0,$$

так что общие интегралы (34) ур-ний равновесия тела представятся под видом:

$$\left.\begin{aligned}u=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial y},\\ w=\frac{\partial\omega}{\partial z}+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial z},\end{aligned}\right\}\quad(78)$$

причем гармоническая функция $\omega$ определяется ур-нием

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)_s\equiv-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\left(\frac{\partial I}{\partial n}\right)_s.\quad(79)$$

Как видим, в этом случае *замыкающий вектор перемещений* $(u, v, w)$ *частиц тела «имеет потенциал»*.

Обратно, если имеет место это последнее обстоятельство, так что

$$\omega_1\equiv 0,\quad \omega_2\equiv 0,\quad \omega_3\equiv 0\quad \text{и, след.,}\quad \Omega\equiv 0,$$

то ур-ния (72) дают:

$$F_s\equiv 0,$$

т. е. поверхность $S$ тела должна быть одною из «поверхностей уровня» для «объемных» сил $(X, Y, Z)$ *в предположении, что никаких давле-*

ний извне на эту поверхность не существует. В случае же существования таких давлений и отсутствия, наоборот, «объемных» сил, ур-ния (8) дадут, что

$$f_s \equiv 0, \quad \varphi_s \equiv 0, \quad \psi_s \equiv 0,$$

т. е. сами эти давления, рассматриваемые как функции трех независимых переменных, должны «иметь потенциал» Φ, и тогда гармоническая функция ω удовлетворяет «граничному» условию

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial n}\right)_s \equiv \frac{1+\mu}{E} \Phi_s. \tag{80}$$

11 X 1926

## G. GRODSKIJ. SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS GÉNÉRALES D'ÉQUILIBRE D'UN SOLIDE ÉLASTIQUE ISOTROPE A L'AIDE DES POTENTIELS NEWTONIENS ET DES FONCTIONS HARMONIQUES

### RÉSUMÉ


Ces équations s'écrivent comme suit

$$\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta_2 u = -aX, \quad \text{etc.} \tag{1}$$

où $u$, $v$, $w$ — sont les projections du déplacement du point $(x,y,z)$,
$X$, $Y$, $Z$ — les projections de l'accélération produite par les forces externes agissantes sur ce point,
ρ — la relation de la masse en ce point et du volume de cette masse,
θ — la dilatation cubique, de sorte que

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2}$$

$E$ — le module d'élasticité, μ — «le nombre de Poisson», le coefficient

$$a = 2\,\frac{1+\mu}{E}\,\rho, \tag{3}$$

enfin

$$\Delta_2 F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \tag{4}$$

les accélérations $X$, $Y$, $Z$ sont supposées indépendantes du temps.

En posant

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta + z)^2} \tag{5}$$

et puis

$$\dot{I}_1 = \int\limits_{\omega} \frac{X(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega, \quad \dot{I}_2 = \int\limits_{\omega} \frac{Y(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega, \quad \dot{I}_3 = \int\limits_{\omega} \frac{Z(\xi,\eta,\zeta)}{r}\,d\omega \tag{6}$$

où ω représente le volume total du solide,

$$\dot{I} = \frac{\partial \dot{I}_1}{\partial x} + \frac{\partial \dot{I}_2}{\partial y} + \frac{\partial \dot{I}_3}{\partial z} \tag{7}$$

et

$$u = u_1 + \frac{a}{4\pi} \grave{I}_1, \quad v = u_1 + \frac{a}{4\pi} \grave{I}_2, \quad w = w_1 + \frac{a}{4\pi} \grave{I}_3 \tag{8}$$

nous aurons

$$\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \Delta_1 u_1 = -\frac{a}{4\pi(1-2\mu)} \frac{\partial \dot{I}}{\partial x} \quad \text{etc.} \tag{9}$$

où

$$\theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}, \tag{10}$$

de sorte que dans ces équations nouvelles (1) les termes connus sont les derivées d'une même fonction par les arguments correspondants.

Ce résultat nous permet supposer du premier abord que les accélérations $X$, $Y$, $Z$ elles-mêmes ont un potentiel de sorte que

$$X \equiv \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y \equiv \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z \equiv \frac{\partial F}{\partial z}; \tag{11}$$

alors en posant avec Lamé

$$I = \int\limits_{\omega} \frac{F(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\omega \tag{12}$$

et

$$u = u_1 + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \text{etc.} \tag{13}$$

où $\omega$ est une fonction harmonique, c'est-à-dire

$$\Delta_2 \omega \equiv 0, \tag{14}$$

nous donnerons aux équations (1) la forme

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + (1-2\mu) \Delta_2 u_1 = 0 \quad \text{etc.} \tag{15}$$

où de nouveau

$$\theta_1 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \tag{10}$$

tandis que

$$\theta = \theta_1 - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} aF(x, y, z) \tag{16}$$

Maintenant nous posons avec P. Schiff

$$u_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \gamma}{\partial z}; \tag{17}$$

les équations (15) après leurs intégrations par rapport aux $x$, $y$, $z$ donneront

$$\theta_1 + (1-2\mu)\alpha = 0, \quad \theta_1 + (1-2\mu)\beta = 0, \quad \theta_1 + (1-2\mu)\gamma = 0, \tag{18}$$

parce qu'il n'est pas necessaire d'ajouter les termes arbitraires

$$f_1(y, z), \quad f_2(z, x), \quad f_3(x, y)$$

dans les seconds membres de ces équations (18).

Pour aller plus loin supposons

$$\alpha = \psi_1 - \frac{1}{4(1-\mu)} \psi, \quad \beta = \psi_2 - \frac{1}{4(1-\mu)} \psi, \quad \gamma = \psi_3 \frac{1}{4(1-\mu)} \psi \tag{19}$$

où

$$\psi \equiv x\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+z\frac{\partial\psi_3}{\partial z}; \tag{20}$$

il est facile de démontrer que ces équations peuvent être satisfaites quelles que soient les fonctions $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$; nous aurons alors

$$\Delta_2\psi_1=\Delta_2\psi_2=\Delta_2\psi_3=\frac{1}{2(1-2\mu)}\left[x\frac{\partial\Delta_2\psi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\Delta_2\psi_2}{\partial y}+z\frac{\partial\Delta_2\psi_3}{\partial z}\right] \tag{21}$$

d'où on peut conclure que

$$\alpha=\psi_1-\frac{\Omega}{4(1-\mu)},\quad \beta=\psi_2-\frac{\Omega}{4(1-\mu)},\quad \gamma=\psi_3-\frac{\Omega}{4(1-\mu)}, \tag{22}$$

où

$$\Omega\equiv x\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+y\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+z\frac{\partial\psi_3}{\partial z} \tag{23}$$

et

$$\Delta_2\psi_1\equiv 0,\quad \Delta_2\psi_2\equiv 0,\quad \Delta_2\psi_3\equiv 0 \tag{24}$$

c'ést-à-dire, les fonctions $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$ sont harmoniques. Enfin en posant

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\equiv\omega_1,\quad \frac{\partial\psi_2}{\partial y}=\omega_2,\quad \frac{\partial\psi_3}{\partial z}\equiv\omega_3 \tag{25}$$

où les fonctions $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ sont évidemment également harmoniques, nous aurons

$$\Omega\equiv x\omega_1+y\omega_2+z\omega_3 \tag{26}$$

et

$$u=\omega_1-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{1-}{2(1-\mu)}\frac{}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad \text{etc}, \tag{27}$$

d'où

$$\theta\equiv\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)-aF\right]. \tag{28}$$

En différentiant l'équation (26) nous trouverons encore que

$$\Delta_2\Omega\equiv 2\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)\equiv 2D(\omega_1,\ \omega_1,\ \omega_3) \tag{29}$$

et puis

$$\Delta_2\Delta_2\Omega\equiv 0 \tag{30}$$

de sorte que la fonction $\Omega$ est biharmonique.

Pour les composantes des tensions antérieures nous obtiendrons:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1+\mu}{E}N_x=\frac{\mu}{2(1-\mu)}p\left[D(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)-aF\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial u}+\frac{1}{2}\Big(p\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+\\ +r\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\Big)-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\Omega-\frac{1-2\mu}{2\pi}aI\right)+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial n}\quad \text{etc}.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

où $N$ est la tension d'une aire infiniment petite dont la normale est $\bar{n}$; $p$, $q$, $r$ sont le cosinus des angles de cette normale $\bar{n}$ avec les axes des coordonnés; ces formules (31) donnent encore

$$\left.\begin{aligned}\frac{1+\mu}{E}N_x=\frac{\mu}{2(1-\mu)}(D-aF)+\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+r\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right)\\ -\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial n^2}\left(\Omega-\frac{1-2\mu}{2\pi}aI\right)+\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}\ \ldots\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

et, comme cas particuliers:

$$\frac{1+\mu}{E} X_x = \frac{\mu}{2(1-\mu)}(D - aF) + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\Omega - \frac{1-2\mu}{2\pi} aI\right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \text{ etc.} \quad (32)$$

et

$$\frac{1+\mu}{E} Y_z = \frac{1+\mu}{E} Z_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y}\right) - \frac{1}{4(1-\mu)} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\Omega - \frac{1-2\mu}{2\pi} aI\right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial z}, \text{ etc.} \quad (33)$$

Supposons que ce sont les déplacements de tous les points superficiels qui nous ont donné:

$$u_s \equiv f(x, y, z) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_s \equiv \varphi(x, y, z) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w_s \equiv \psi(x, y, z) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (34)$$

où les termes $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ sont les parties des déplacements qui sont les dérivées d'une même fonction $\Phi(x, y, z)$ lorsque on prend $x, y, z$ indépendants entre eux. Des expressions (27) nous recevons

$$xu + yv + zw \equiv \Omega - \frac{1}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y\frac{\partial \Omega}{\partial y} + z\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi}\left(x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z}\right) + \left(x\frac{\partial \omega}{\partial x} + y\frac{\partial \omega}{\partial y} + z\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)$$

de sorte que sur la surface $S$ du solide nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_s - \frac{1}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y\frac{\partial \Omega}{\partial y} + z\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)_s + \left(x\frac{\partial \omega}{\partial x} + y\frac{\partial \omega}{\partial y} + z\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_s \equiv \\ &\equiv (xf + y\varphi + z\psi) - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi}\left(x\frac{\partial I}{\partial x} + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z}\right) + \\ &+ \left(x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

où la fonction dans la partie droite est connue.

En faisant

$$\Omega_s \equiv (xf + y\varphi + z\psi)_s \quad (36)$$

nous aurons encore

$$\left.\begin{aligned} &\left(x\frac{\partial \omega}{\partial x} + y\frac{\partial \omega}{\partial y} + z\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_s \equiv \left(x\frac{\partial \Phi}{\partial x} + y\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_s - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi}\left(x\frac{\partial I}{\partial x} + \right. \\ &\left. + y\frac{\partial I}{\partial y} + z\frac{\partial I}{\partial z}\right)_s + \frac{1}{4(1-\mu)}\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y\frac{\partial \Omega}{\partial y} + z\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)_s \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

et nous cherchons la fonction biharmonique $\Omega$ qui satisfait à la condition (36) et puis la fonction harmonique $\omega$ satisfaisante à l'équation (37) après quoi nous aurons à trouver les trois fonctions également harmoniques

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3$$

remplissant les conditions superficielles

$$\left.\begin{aligned} (\omega_1)_s = &\frac{1}{4(1-\mu)}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_s - \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_s - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{a}{4\pi}\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_s - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_s + \\ &+ [f(x, y, z)]_s + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_s \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

ce qui nous conduit à la résolution des trois «problèmes de Dirichlet» indépendants.

On peut montrer que les fonctions

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega$$

ne peuvent recevoir que des expressions bien déterminées.

Supposons maintenant que nous avons les projections des tensions superficielles

$$N_x, \quad N_y, \quad N_z.$$

Nous pouvons écrire les conditions sur la surface du solide sous la forme

$$\frac{E}{1+\mu}\left\{\frac{\mu}{2(1-\mu)}pD+\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+\frac{1}{2}\left(p\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+q\frac{\partial\omega_2}{\partial x}+r\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\right)-\frac{1}{4(1-\mu)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial n}+\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial n}\right\}_s=$$
$$=N_x-\frac{Ea}{2(1-\mu)}\left[-\mu X+\frac{1-2\mu}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial n}\right]_s \text{ etc.}$$

Il suit de ces équations que le problème de l'équilibre élastique d'un solide isotrope en présence des forces proportionelles aux masses s'est réduit au problème pareil en absence de telles forces sous la condition de remplacer les forces superficielles données

$$N_x, \quad N_y, \quad N_z$$

par les différences

$$N_x-\frac{aE}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{1-2\mu}{4\pi}\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial n}-\mu X\right]_s \quad \text{etc.} \tag{39}$$

Inversement, a l'aide de la méthode développée par A. N. Kriloff, Membre de l'Academie dans son mémoire «Über die erzwungenen Schwingungen von gleichformigen Stäben» (Mathematische Annalen, tome 61) on peut s'affranchir des forces superficielles; notamment, si nous posons

$$\dot{I}_{1s}=\frac{1}{\rho}\int_s\frac{N_x(\xi,\eta,\zeta)}{r}ds \quad \text{etc.} \tag{40}$$

$$\dot{I}_{0s}=\frac{\partial\dot{I}_{1s}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{I}_{2s}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{I}_{3s}}{\partial z} \tag{41}$$

et puis

$$u=u_1+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{a}{4\pi}\dot{I}_{1s} \quad \text{etc.} \tag{42}$$

nous donnerons aux équations (1) la forme suivante

$$\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\Delta_2 u_1=-\frac{1}{1-2\mu}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial\dot{I}_{0s}}{\partial x}, \quad \text{etc.} \tag{43}$$

qui est tout-à-fait semblable à la forme des équations (9), mais il faut à présent prendre les tensions superficielles égales à zéro.

En supposant maintenant que ces tensions n'existent pas nous pourrons écrire les conditions à la surface comme suit

$$\left.\begin{aligned}2\mu\frac{1-\mu}{1-2\mu}(p\theta)_s-(1-\mu)\left(x\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x\,\partial n}+y\frac{\partial^2\omega_2}{\partial x\,\partial n}+z\frac{\partial^2\omega_3}{\partial x\,\partial n}\right)_s+\frac{1-2\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s+\\+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial n}\right)_s=-\frac{1-2\mu}{4\pi}a\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial n}\right)_s \quad \text{etc;}\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

et si nous savons trouver les trois fonctions harmoniques

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3$$

définies par les équations «frontières»:

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial n}\right)_s + \mu\left[p\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\omega_3}{\partial z}\right)\right]_s \equiv \mu d(X)_s, \quad \text{etc.} \tag{45}$$

nous finirons la résolution de notre problème par la détermination de la fonction harmonique $\omega$ remplissant la condition «frontière»

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)_s \equiv \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right) - \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial n}\right)_s + \frac{a}{4\pi}\left(\frac{\partial I}{\partial n}\right)_s\right]. \tag{46}$$

Au cas particulier lorsque la surface $S$ du solide est une des «surfaces de niveau» pour les forces $X$, $Y$, $Z$ nous pouvons satisfaire les equations frontières (45) en faisant

$$\omega_1 \equiv 0, \quad \omega_2 \equiv 0, \quad \omega_3 \equiv 0$$

parce que la fonction $F$ a une valeur constante sur toute la surface $S$ que nous pouvons faire nulle à l'aide de la «constante arbitraire»; par suite aussi

$$\Omega \equiv 0$$

et nous aurons des équations (27) plus simplement

$$u = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{a}{4\pi}\frac{\partial I}{\partial x}, \quad \text{etc.} \tag{47}$$

de sorte que les déplacements $u$, $v$, $w$ «ont un potentiel».

Inversement, si ce potentiel existe nous devrons poser

$$\omega_1 \equiv 0, \quad \omega_2 \equiv 0, \quad \omega_3 \equiv 0,$$

et par suite

$$\Omega \equiv 0$$

de sorte que les expressions (27) prennent la forme (47), tandis que les équations (45) donnent

$$F_s \equiv 0$$

c'est-à-dire la surface $S$ du solide est une des «surfaces de niveau» pour les forces $X$, $Y$, $Z$ sous la condition qu'il n'y ait pas de forces superficielles. Si au contraire ces dernières forces subsistent et sont égales $f(x, y, z) + \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}$ etc. tandis qu'il n'y a pas de forces proportionelles aux masses, les équations aux frontières qui prennent alors la forme suivante

$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial n}\right)_s + \frac{\mu}{1-\mu}\left[p\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)\right]_s \equiv 2\,\frac{1+\mu}{E} f(x, y, z), \quad \text{etc} \tag{48}$$

et

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)_s \equiv \frac{1}{2}\left(x\frac{\partial\omega_1}{\partial n}+y\frac{\partial\omega_2}{\partial n}+z\frac{\partial\omega_3}{\partial n}\right) - \frac{1-2\mu}{4(1-\mu)}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial n}\right)_s + \frac{1+\mu}{E}\Phi_s, \tag{49}$$

nous donnent

$$f_s \equiv 0, \quad \varphi_s \equiv 0, \quad \psi_s \equiv 0$$

de sorte que

$$N_x \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad N_y \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad N_z \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

où les variables $x$, $y$, $z$ sont comptées pour indépendantes.

---

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВИБРАТОРА

Ю. А. КРУТКОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

Цель этой статьи — рассмотрение Броуновского движения системы с одной степенью свободы, повинующейся дифференциальному уравнению:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t) + P(t), \tag{I}$$

где $a$, $b$, $c$ постоянные, $Q(t)$ — заданная обобщенная сила — функция времени (мы будем далее называть ее «систематической» силой) и $P(t)$ — «случайная» обобщенная сила, производящая Броуновское движение. Для наглядности, мы в дальнейшем будем говорить о $q$ как о линейной координате $x$ и о $\dot{q}$ как о линейной скорости $v$. Ясно, однако, что все дальнейшее будет относиться к общему уравнению (I). «Систематическую» силу $Q(t)$ мы сперва возьмем в виде гармонической функции времени, что представляет наибольший интерес, но далее избавимся от этого ограничения. Таким образом, нашему рассмотрению подлежит уравнение, которое мы напишем в следующем виде:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + n^2 x = De^{ikt} + F(t). \tag{I*}$$

Наше рассмотрение будет охватывать одновременно как случай колебательного, так и апериодического движения.

Область применения наших результатов довольно широка. В качестве примеров укажем на такие различные вопросы, как вопрос об естественной границе наблюдения силы тока[1] и вопрос о боковой качке корабля на волнении.[2]

Не представляет труда перейти от рассматриваемой нами одномерной задачи к многомерной, однако, уже в нашем случае выкладки достаточно громоздки,

[1] См. F. Zernike. Zschr. f. Phys., **40**, 1927, 628; L. S. Ornstein. Zschr. f. Phys., **41**, 1927, 848.
[2] Доклады Академии Наук СССР, II, 1934, 158.

почему мы и ограничиваемся рассмотрением этой простейшей одномерной «линейной задачи теории Броуновского движения».[1]

Для §§ 5 и 6 я пользовался помощью С. Умарова, аспиранта Академии Наук СССР, а также И. И. Гребенщикова, аспиранта Ленинградского университета. Считаю приятным долгом выразить им здесь свою благодарность.

Некоторые из наших результатов были в последнее время получены Орнштейном и Фан Вейком,[2] но *совершенно другим методом*, почему мы и считаем не излишним их вторичное опубликование.

§ **1. Основное интегральное уравнение.** Заменим (I*) системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} + 2hv + n^2 x &= De^{ikt} + F(t), \\ \dot{x} &= v. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Рассмотрим изменения $v$ и $x$ за *малый* промежуток времени $\tau$. Очевидно, имеем, согласно (1):

$$\left.\begin{aligned} &\Delta v = -2hv\tau - n^2 x\tau + De^{ikt}\tau + F(t)\tau, \\ &\Delta x = v\tau. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Отбросим пока «случайную силу» $F(t)$, тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 v = -2hv\tau - n^2 x\tau + De^{ikt}\tau, \\ &\Delta_1 x = v\tau. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Пусть $f(v, x, t)\,dv\,dx$ вероятность системе во время $t$ иметь скорость $v$ и координату $x$ в соответствующих промежутках $(v, v + dv)$ и $(x, x + dx)$. Выразим $f(v, x, t + \tau)$ через значения $f$ во время $t$.

Отбрасывая сперва $F(t)$, вычислим изменение $f$ от «систематических сил». Дабы скорость $v'$ и координата $x'$, относящиеся к моменту $t$, в момент $t + \tau$ попали в промежутки $(v, v + dv)$ и $(x, x + dx)$ должны быть выполнены неравенства

$$\left.\begin{aligned} v \leqslant v' + \Delta v' \leqslant v + dv, \\ x \leqslant x' + \Delta x' \leqslant x + dx, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

или, согласно (3), неравенства:

$$\left.\begin{aligned} v \leqslant v' - 2hv'\tau - n^2 x'\tau + De^{ikt}\tau \leqslant v + dv, \\ x \leqslant x' + v'\tau \leqslant x + dx. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1] См. Доклады Академии Наук СССР, I, 1934, 479; III, 1934. 215. Перечислю здесь еще другие мои статьи и заметки о Броуновском движении: Известия Академии Наук СССР, 1933, 1419; Phys. Zschr. d. Sowjetunion 5, 1934, 287; Доклады Академии Наук СССР. I, 1934, 393; III, 1934, 87; 153. Многие из результатов этой статьи даны там без подробных доказательств.

[2] L. S. Ornstein and W. R. van Wijk. Physica, I, 1934, 235.

Отсюда получаем, сохраняя только линейные в $\tau$ члены,

$$\left.\begin{aligned} v(1+2h\tau)+n^2x\tau-De^{ikt}\tau \leqslant v' \leqslant v(1+2h\tau)+n^2x\tau-De^{ikt}\tau+dv,\\ x-v\tau \leqslant x' \leqslant x-v\tau+dx. \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

Итак:

$$\begin{gathered} f(v', x', t)\,dv'\,dx' = \\ = f[v(1+2h\tau)+n^2x\tau-De^{ikt}\tau,\ x-v\tau,\ t](1+2h\tau)\,dv\,dx. \end{gathered} \quad (6)$$

С другой стороны, все частицы промежутка $(v, v+dv;\ x, x+dx)$ за время $\tau$ уйдут из него. Составим разность

$$f(v', x', t)\,dv'\,dx' - f(v, x, t)\,dv\,dx \quad (7)$$

и перейдем к учету действия «случайных сил» $F(t)$.

Пусть $\psi(\eta, \tau)\,d\eta$ вероятность, что скорость системы под действием «сил» $F(t)$ за время $\tau$ изменится на величину, лежащую в промежутке $(\eta, \eta+d\eta)$. Тогда, очевидно, все системы, для которых во время $t$ скорость $v'$ лежит в промежутке

$$v \leqslant v' + \eta \leqslant v + dv, \quad (8)$$

попадут в промежуток $(v, v+dv)$. Чтобы их $x'$ попало в $(x, x+dx)$ должно быть

$$x \leqslant x' + \frac{1}{2}\,\frac{\eta}{\tau}\,\tau^2 \leqslant x + dx; \quad (8')$$

действительно — среднее ускорение равно $\frac{\eta}{\tau}$, скорость равна $v'$, следовательно, смещение равно $v'\tau + \frac{1}{2}\,\frac{\eta}{\tau}\,\tau^2$, но часть смещения $v'\tau$ уже принята во внимание в (7); остается смещение $\frac{1}{2}\,\frac{\eta}{\tau}\,\tau^2$.

При заданном $\eta$ искомая величина равна

$$f\left(v-\eta,\ x-\frac{1}{2}\eta\tau,\ t\right)\psi(\eta, \tau)\,dv'\,dx'\,d\eta \quad (9)$$

или, вводя $\eta = v - v'$, равна

$$f\left(v',\ x-\frac{1}{2}(v-v')\tau,\ t\right)\psi(v-v', \tau)\,dv'\,dx\,dv. \quad (9')$$

Интегрируя по $v'$ от $-\infty$ до $+\infty$, получим все, что нужно добавить к (7). Таким образом, сокращая на $dv\,dx$, получим окончательно:

$$\begin{gathered} f(v, x, t+\tau) = \\ = f[v(1+2h\tau)+n^2x\tau-De^{ikt}\tau,\ x-v\tau,\ t](1+2h\tau) - f(v, x, t) + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} f\left[v',\ x-\frac{1}{2}(v-v')\tau,\ t\right]\psi(v-v', \tau)\,dv'. \end{gathered} \quad (10)$$

(10) и есть основное уравнение для определения $f(v, x, t)$.

§ **2. Решение уравнения (10).** Пусть $\lambda$ и $\mu$ *чисто мнимые* величины. Вводим величины

$$\Phi(\lambda, \mu, t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda v - \mu x} f(v, x, t)\, dv\, dx, \tag{11}$$

$$\varphi(\lambda, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda \eta} \psi(\eta, \tau)\, d\eta. \tag{12}$$

Если мы (10) умножим на $e^{-\lambda v - \mu x}\, dv\, dx$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$, то слева получим $\Phi(\lambda, \mu, t+\tau)$; второй член справа дает $\Phi(\lambda, \mu, t)$, остается рассмотреть первый и последний члены справа. В первом члене возвращаемся к переменным $v'$, $x'$, тогда согласно (5) получим, замечая еще, что

$$dv' = dv(1 + 2h\tau):$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda[v'(1-2h\tau) - n^2 x'\tau + De^{ikt}\tau] - \mu[x' + v'\tau]} f(v', x', t)\, dv'\, dx',$$

что, как легко видеть, равно

$$\Phi[\lambda(1 - 2h\tau) + \mu\tau,\ \mu - \lambda n^2\tau,\ t]\, e^{-\lambda De^{ikt}\tau}.$$

В последнем члене справа полагаем

$$v - v' = \eta, \quad x - \frac{v - v'}{2}\tau = y, \quad v' = v'$$

и получаем, так как $v = v' + \eta$, $x = y + \frac{v - v'}{2}\tau$:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(v'+\eta) - \mu\left(y + \frac{\eta}{2}\tau\right)} f(v', y, t)\, \psi(\eta, \tau)\, dv'\, dy\, d\eta,$$

что, очевидно, равно

$$\Phi(\lambda, \mu, t)\, \varphi\left(\lambda + \frac{\mu\tau}{2}, \tau\right).$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda, \mu, t+\tau) = \Phi[\lambda(1 - 2h\tau) + \mu\tau,\ \mu - \lambda n^2\tau),\ t]\, e^{-\lambda De^{ikt}\tau} - \Phi(\lambda, \mu, t) + \\ + \Phi(\lambda, \mu, t)\, \varphi\left(\lambda + \frac{\mu\tau}{2}, \tau\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Разлагая в ряд по степеням $\tau$ и ограничиваясь линейными членами, получаем:

$$\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\tau = \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(-2h\lambda\tau + \mu\tau) - \frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\lambda n^2\tau - \Phi\lambda De^{ikt}\tau - \Phi + \\ + \Phi\varphi(\lambda, 0) + \Phi\frac{\partial\varphi(\lambda, 0)}{\partial\lambda}\frac{\mu\tau}{2} + \Phi\left(\frac{\partial\varphi(\lambda, \tau)}{\partial\tau}\right)_{\tau=0}\tau \qquad (13')$$

или, после сокращений:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (2h\lambda - \mu)\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + n^2\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} = -\lambda De^{ikt}\Phi + \Gamma,$$

где

$$\Gamma = \frac{\Phi\varphi(\lambda, 0) - \Phi}{\tau} + \Phi\left[\frac{\partial\varphi(\lambda, 0)}{\partial\lambda}\frac{\mu}{2} + \left(\frac{\partial\varphi(\lambda, \tau)}{\partial\tau}\right)_{\tau=0}\right];$$

но

$$\varphi(\lambda, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\eta}\psi(\eta, \tau)\,d\eta;$$

для $\tau = 0$ $\psi$ имеет существенно особый характер, обращаясь в нуль всюду кроме точки $\eta = 0$, в которой $\psi$ обращается в бесконечность, но так, что соблюдается условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\,d\eta = 1; \qquad (14)$$

иначе говоря

$$\psi(\eta, 0) = \delta(\eta), \qquad (15)$$

где $\delta(\eta)$ известная несобственная функция. Таким образом,

$$\varphi(\lambda, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\eta}\delta(\eta)\,d\eta = (e^{-\lambda\eta})_{\eta=0} = 1 \qquad (16)$$

и первых два члена в $\Gamma$ сокращаются. Далее:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\eta}\,\eta\psi(\eta, \tau)\,d\eta, \qquad (17)$$

что для $\tau = 0$ дает $(e^{-\lambda\eta}\eta)_{\eta=0} = 0$. Наконец обозначаем $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_{\tau=0}$ через $\chi(\lambda)$:

$$\left(\frac{\partial\varphi(\lambda, \tau)}{\partial\tau}\right)_{\tau=0} = \chi(\lambda). \qquad (18)$$

Итак имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (2h\lambda - \mu)\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + n^2\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} = \left(\chi(\lambda) - \lambda De^{ikt}\right)\Phi. \qquad (19)$$

Таким образом, (10) сведено к линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, интегрирование которого не представляет труда.

Эквивалентная система для него напишется так:

$$dt = \frac{d\lambda}{2h\lambda - \mu} = \frac{d\mu}{n^2\lambda} = \frac{dz}{\chi(\lambda) - \lambda De^{ikt}}, \tag{20}$$

где

$$z = \log \Phi.$$

§ **3. Решение уравнения (10). Продолжение.**[1] Переписываем (20) так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= 2h\lambda - \mu \\ \frac{d\mu}{dt} &= n^2\lambda \end{aligned}\right\} \tag{20'}$$

и

$$\frac{dz}{dt} = \chi(\lambda) - De^{ikt}\lambda. \tag{20''}$$

Определив $\lambda$ и $\mu$ как функции $t$ из (20′), мы затем найдем $z$ простой квадратурой.

Полагая

$$\lambda = \Lambda e^{\sigma t}, \ \mu = \mathrm{M}e^{\sigma t}$$

находим после простых выкладок:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= e^{ht}[Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}], \\ \mu &= e^{ht}[A(h-\alpha)e^{\alpha t} + B(h+\alpha)e^{-\alpha t}], \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где $A$ и $B$ постоянные произвольные и

$$\alpha = \sqrt{h^2 - n^2}, \tag{22}$$

т. е. для колебательного движения величина чисто мнимая.

Разрешая (21) относительно $A$ и $B$ получаем

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\lambda(h+\alpha) - \mu}{2\alpha} e^{-(h+\alpha)t} \\ B &= -\frac{\lambda(h-\alpha) - \mu}{2\alpha} e^{-(h-\alpha)t}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Подставляя $\lambda$ из (21) в (20″) найдем

$$z = \int [\chi(\lambda(t)) - De^{ikt}\lambda(t)]\, dt + \text{const}. \tag{24}$$

[1] См. Дополнение I в конце статьи.

Чтобы выполнить эту квадратуру нам нужно знать функцию $\chi(\lambda)$. Положим

$$\chi(\lambda) = \frac{h}{a}\lambda^2, \tag{25}$$

где $a$ новая постоянная. Основания для этого выбора будут даны ниже (§ 4).

Итак имеем

$$z = \int \left[\frac{h}{a}\lambda^2 - De^{ikt}\lambda\right] dt + \text{const},$$

где вместо $\lambda$ нужно подставить его значение (21). Нам выгодно взять значение интеграла, обращающиеся в нуль для $t = 0$, пределы интеграла будут 0 и $t$. Мы получаем:

$$z - \text{const} = \frac{h}{a}\left\{A^2\frac{e^{2(h+\alpha)t}-1}{2(h+\alpha)} + B^2\frac{e^{2(h-\alpha)t}-1}{2(h-\alpha)} + 2AB\frac{e^{2ht}-1}{2h}\right\} -$$

$$- DA\frac{e^{(h+\alpha+ik)t}-1}{h+\alpha+ik} - DB\frac{e^{(h-\alpha+ik)t}-1}{h-\alpha+ik}.$$

Подставляя сюда значения $A$ и $B$ из (23), получаем окончательно:

$$z - \text{const} = \frac{h}{a}\left\{\frac{[\lambda(h+\alpha)-\mu]^2}{4\alpha^2\cdot 2(h+\alpha)}(1-e^{-2(h+\alpha)t}) +\right.$$

$$\left. + \frac{[\lambda(h-\alpha)-\mu]^2}{4\alpha^2\cdot 2(h-\alpha)}(1-e^{-2(h-\alpha)t}) - 2\frac{[\lambda(h+\alpha)-\mu][\lambda(h-\alpha)-\mu]}{4\alpha^2\cdot 2h}(1-e^{-2ht})\right\} - \tag{26}$$

$$- D\frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha(h+\alpha+ik)}(e^{ikt}-e^{-(h+\alpha)t}) + D\frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha(h-\alpha+ik)}(e^{ikt}-e^{-(h-\alpha)t}).$$

Теперь можем написать решение уравнения (19):

$$z = \Omega + F\left[\frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha}e^{-(h+\alpha)t}, -\frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha}e^{-(h-\alpha)t}\right], \tag{27}$$

где $\Omega$ обозначает правую часть (26) и $F$ знак произвольной функции. Таким образом $\Phi(\lambda, \mu, t)$ найдено:

$$\Phi = e^z. \tag{27'}$$

Чтобы найти $f(v, x, t)$ замечаем, что

$$\Phi(\lambda, \mu, t) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda v - \mu x} f(v, x, t)\, dv\, dx,$$

а потому на основании теоремы об интеграле Фурье имеем:

$$f(v, x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint e^{\lambda v + \mu x}\Phi(\lambda, \mu, t)\, d\lambda\, d\mu, \tag{28}$$

причем пределы интегрирования по $\lambda$ и $\mu$ суть $-i\infty$ и $+i\infty$. Таким образом имеем:

$$f(v, x, t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\int e^{z+\lambda v+\mu x}\, d\lambda\, d\mu, \tag{28'}$$

где вместо $z$ нужно подставить его выражение (27).

§ **4. Предельный случай** $t \to \infty$. Введем в рассмотрение две новых функции:

$$\left.\begin{aligned} f_1(v, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, x, t)\, dx, \\ f_2(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v, x, t)\, dv; \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

первая из них, очевидно, плотность вероятности для скоростей, причем координатами мы не интересуемся; вторая соответственно плотность вероятности для координат.

$f_1$ и $f_2$ легко получить из выражения (28) для $f$. Действительно, как $v$, так и $x$ входят в (28) только как множители при $\lambda$ и $\mu$ в показателе. Поэтому интегрирование по $v$ (или по $x$) дает

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda v}\, dv \quad \text{или} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu x}\, dx,$$

что равно $\frac{1}{i}\,\delta\left(\frac{\lambda}{i}\right)$ или $\frac{1}{i}\,\delta\left(\frac{\mu}{i}\right)$ Таким образом мы перейдем от $f$ к $f_1$ или $f_2$, если прибавим в (28′) под интегралом множители $\frac{1}{i}\,\delta\left(\frac{\mu}{i}\right)$ или $\frac{1}{i}\,\delta\left(\frac{\lambda}{i}\right)$, иначе говоря, в первом случае нужно положить в (28′) $\mu = 0$ и оставить только интегрирование по $\lambda$, во втором случае положить $\lambda = 0$ и интегрировать только по $\mu$.

Рассмотрим сперва предельное распределение скоростей ($\mu = 0$), т. е. то распределение, которое получится, если счесть свободные колебания системы затухшими, отбрасывая все члены, содержащие множитель $e^{-ht}$. В этом случае легко получаем:

$$\Omega_1 = \frac{h\lambda^2}{a}\left\{\frac{h+\alpha+h-\alpha}{8\alpha^2} - \frac{h^2-\alpha^2}{4\alpha^2 h}\right\} - \frac{Dike^{ikt}}{n^2-k^2+2ikh}\lambda$$

или

$$\Omega_1 = \frac{\lambda^2}{4a} - \frac{De^{ikt}\,ik}{n^2-k^2+2ikh}\lambda. \tag{30}$$

Таким образом

$$z = \Omega_1 + F(0, 0),$$

но

$$F(0, 0) = 0. \tag{31}$$

Действительно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(v, t)\, dv = 1,$$

интегрирование по $v$ равносильно $\lambda = 0$:

$$1 = e^{F(0,0)}.$$

Итак

$$f_1(v, \infty) = \frac{1}{2\pi i}\int \exp\left[\frac{\lambda^2}{4a} + \lambda\left(v - \frac{Dike^{ikt}}{n^2 - k^2 + 2ikh}\right)\right] d\lambda,$$

где $\exp x$, как обычно, обозначает $e^x$.

Замечая, что $\lambda = iu$ величина чисто мнимая, получаем:

$$f_1(v, \infty) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp\left\{-a\left(v - \frac{Dike^{ikt}}{n^2 - k^2 + 2ikh}\right)^2\right\}. \tag{32}$$

Мы получили разумный результат: Максвеллово распределение для скорости $v - v_1$, где

$$v_1 = \frac{Dike^{ikt}}{n^2 - k^2 + 2ikh};$$

но $v_1$, как легко видеть, скорость вынужденных силой $De^{ikt}$ колебаний, следовательно $v - v_1$ избыток скорости над этой «систематической» скоростью и для него имеем равновесное Максвеллово распределение.

Одновременно мы обосновали наш выбор функции $\chi(\lambda)$.

Рассмотрим теперь предельный вид $f_2(x, t)$. Здесь мы имеем

$$\Omega_2 = \frac{\mu^2}{4a(h^2 - \alpha^2)} - \frac{De^{ikt}\mu}{n^2 - k^2 + 2ikh} = \frac{\mu^2}{4an^2} - \frac{De^{ikt}\mu}{n^2 - k^2 + 2ikh}.$$

Отсюда, поступая совершенно также как раньше, получаем:

$$f_2(x, \infty) = n\sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp\left\{-an^2\left(x - \frac{De^{ikt}}{n^2 - k^2 + 2ikh}\right)^2\right\}. \tag{33}$$

Но

$$x_1 = \frac{De^{ikt}}{n^2 - k^2 + 2ikh}$$

смещение при вынужденном колебании. Следовательно, для избытка координаты $x - x_1$ имеем Больтцманново распределение

$$f_2(x, \infty) = n\sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-an^2(x - x_1)^2}. \tag{33'}$$

Для Броуновского движения постоянная $a$ связана с температурой:

$$a = \frac{Nm}{2RT}, \tag{34}$$

где $m$ — масса частицы, $R$ — абсолютная газовая постоянная, $N$ — число Авогадро, $T$ — абсолютная температура.

§ 5. **Выражение $f(v, x, t)$ через начальное $f(v, x, 0)$.** Пусть для $t=0$

$$f(v, x, 0) = G(v, x). \tag{35}$$

Для $t=0$ $\Omega=0$ и следовательно

$$z_0 = F\left[\frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha}, \quad -\frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha}\right]$$

и

$$\Phi(\lambda, \mu, 0) = e^{z_0} = \exp F\left[\frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha}, -\frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha}\right].$$

С другой стороны

$$\Phi(\lambda, \mu, 0) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda v - \mu x}\, G(v, x)\, dv dx.$$

Пусть

$$\frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha} = p, \quad -\frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha} = q, \tag{36}$$

тогда

$$\lambda = p+q, \quad \mu = (h-\alpha)p + (h+\alpha)q \tag{36'}$$

и мы можем написать

$$\exp F(p, q) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-p\{v+(h-\alpha)x\} - q\{v+(h+\alpha)x\}\right] G(v, x)\, dv dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\exp F\left[pe^{-(h+\alpha)t}, \ qe^{-(h-\alpha)t}\right] = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big[&-pe^{-(h+\alpha)t}\{v+(h-\alpha)x\} - \\ &- qe^{-(h-\alpha)t}\{v+(h+\alpha)x\}\Big] G(v, x)\, dv dx\end{aligned} \tag{37}$$

и мы имеем, вводя вместо $p$ и $q$ величины $\lambda$ и $\mu$:

$$\begin{aligned}&\exp F\left[pe^{-(h+\alpha)t}, \ qe^{-(h-\alpha)t}\right] = \\ &= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha} e^{-(h+\alpha)t}\{v+(h-\alpha)x\} + \right. \\ &\left. + \frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha} e^{-(h-\alpha)t}\{v+(h+\alpha)x\}\right] G(v, x)\, dv dx.\end{aligned} \tag{37'}$$

Подставляя это выражение в (28'), приняв во внимание (27), получаем:

$$\begin{aligned}&f(v, x, t) = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \iiiint \exp\left[\Omega + \lambda v + \mu x - \frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha} e^{-(h+\alpha)t}\{w+(h-\alpha)y\} + \right. \\ &\left. + \frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha} e^{-(h-\alpha)t}\{w+(h+\alpha)y\}\right] G(w, y)\, d\lambda d\mu dw dy,\end{aligned} \tag{38}$$

где по $\lambda$ и $\mu$ интегрируется от $-i\infty$ до $+i\infty$, а по $w$ и $y$ от $-\infty$ до $+\infty$. Интегрирования по $\lambda$ и $\mu$ можно выполнить, так как показатель квадратичная функция этих переменных: вводя для этого показателя знак [ ], имеем

$$[\,] = \mathfrak{A}\lambda^2 + \mathfrak{B}\mu^2 + \mathfrak{C}\lambda\mu + \mathfrak{D}\lambda + \mathfrak{E}\mu,$$

где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ имеют следующие значения (см. 26):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{h}{8a\alpha^2}\Big[(h+\alpha)(1-e^{-2(h+\alpha)t}) + \\ &\quad + (h-\alpha)(1-e^{-2(h-\alpha)t}) - \frac{2(h^2-\alpha^2)}{h}(1-e^{-2ht})\Big], \\ \mathfrak{B} &= \frac{h}{8a\alpha^2}\left[\frac{1-e^{-2(h+\alpha)t}}{h+\alpha} + \frac{1-e^{-2(h-\alpha)t}}{h-\alpha} - \frac{2(1-e^{-2ht})}{h}\right], \\ \mathfrak{C} &= \frac{h}{4a\alpha^2}[-(1-e^{-2(h+\alpha)t}) - (1-e^{-2(h-\alpha)t}) + 2(1-e^{-2ht})], \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D} &= v - \frac{h+\alpha}{2\alpha}e^{-(h+\alpha)t}\{w+(h-\alpha)y\} + \frac{h-\alpha}{2\alpha}e^{-(h-\alpha)t}\{w+(h+\alpha)y\} + \\ &\quad + \frac{D}{2\alpha}\left[-\frac{h+\alpha}{h+\alpha+ik}(e^{ikt}-e^{-(h+\alpha)t}) + \frac{h-\alpha}{h-\alpha+ik}(e^{ikt}-e^{-(h-\alpha)t})\right], \\ \mathfrak{E} &= x + \frac{e^{-(h+\alpha)t}}{2\alpha}\{w+(h-\alpha)y\} - \frac{e^{-(h-\alpha)t}}{2\alpha}\{w+(h+\alpha)y\} + \\ &\quad + \frac{D}{2\alpha}\left[\frac{e^{ikt}-e^{-(h+\alpha)t}}{h+\alpha+ik} - \frac{e^{ikt}-e^{-(h-\alpha)t}}{h-\alpha+ik}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Легко видеть, что для $t \to \infty$ получаем:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4a}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{4a(h^2-\alpha^2)} = \frac{1}{4an^2}, \quad \mathfrak{C} = 0, \qquad (41)$$

$$\mathfrak{D} = v - \frac{De^{ikt}\,ik}{h^2-\alpha^2-k^2+2ihk}, \quad \mathfrak{E} = x - \frac{De^{ikt}}{h^2-\alpha^2-k^2+2ihk} \qquad (42)$$

или (см. 32 и 33)

$$\mathfrak{D} = v - v_1, \quad \mathfrak{E} = x - x_1, \qquad (42')$$

а отсюда легко получаем (ввиду $\mathfrak{C} = 0$)

$$f(v, x, \infty) = f_1(v, \infty) f_2(x, \infty). \qquad (43)$$

Заметим еще, что выражения (41, 42) приближенно верны для тех времен, когда свободные колебания вибратора можно считать затухшими.

Для общего случая элементарная выкладка приводит к результату:

$$f(v, x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{4\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2}} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2+\mathfrak{A}\mathfrak{E}^2-\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{4\mathfrak{A}\mathfrak{B}-\mathfrak{C}^2}\right] G(w, y)\, dw\, dy, \quad (44)$$

т. е. в показателе появляется квадратичная форма *союзная* форме

$$\mathfrak{A}\lambda^2 + \mathfrak{B}\mu^2 + \mathfrak{C}\lambda\mu$$

(см. дополнение II в конце статьи). Если в момент $t = 0$ все вибраторы имеют ту же элонгацию $x_0$ и ту же скорость $v_0$, то

$$G(w, y) = \delta(w - v_0)\,\delta(x - x_0)$$

и мы получаем

$$f(v, x, t;\ v_0, x_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{4\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}} \exp\left[-\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{4\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}\right], \qquad (45)$$

где в $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ нужно вместо $w$ и $y$ подставить $v_0$ и $x_0$.

§ **6. Распределение скоростей и координат.** Согласно (29) мы получим распределение скоростей и координат, интегрируя (44) по $x$, resp. по $v$, от $-\infty$ до $+\infty$. Замечая, что $x$ и $v$ входят только в $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$ соответственно, без труда получаем

$$f_1(v, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mathfrak{A}}} \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{A}}\right] G(w, y)\, dw\, dy \qquad (46)$$

и

$$f_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mathfrak{B}}} \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{\mathfrak{E}^2}{4\mathfrak{B}}\right] G(w, y)\, dw\, dy. \qquad (47)$$

Если для $t = 0$ имеем

$$G(w, y) = \delta(w - v_0)\,\delta(y - x_0),$$

то для плотностей вероятностей получим

$$f_1(v, t;\ v_0, x_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mathfrak{A}}} e^{-\frac{\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{A}}}, \qquad (48)$$

$$f_2(\quad;\ v_0, x_0) = \frac{1}{2\sqrt{\cdot\,\mathfrak{B}}} e^{-\frac{\mathfrak{E}^2}{4\mathfrak{B}}}, \qquad (49)$$

где в $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ нужно подставить вместо $w$, $y$ начальные значения $v_0$, $x_0$.

Формулы (44—49) полностью решают нашу задачу: (44, 46, 47) дают распределение фаз (состояний движения), скоростей и координат для произвольного начального распределения $f(v, x, 0) = G(v, x)$; (45, 48, 49) дают особенно важный частный случай, а именно вероятность фазы, скорости и элонгации, если известна начальная фаза $v_0$, $x_0$.

Переходим к рассмотрению задач — частных случаев нашей.

§ 7. **Случай Смолуховского.** Под случаем Смолуховского понимаем случай, им рассмотренный,[1] когда в основном нашем «механическом» уравнении можно пренебречь силой инерции по отношению к прочим силам. В этом случае уравнения (1) можно заменить одним уравнением

$$\dot{x} + \beta x = \frac{D}{2h} e^{ikt} + \frac{F(t)}{2h}, \tag{50}$$

где $\beta = \frac{n^2}{2h}$. Так как решение уравнения

$$\dot{x} + \beta x = 0$$

есть

$$x = x_0 e^{-\beta t},$$

а уравнения

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + n^2 x = 0$$

есть

$$x = Ae^{-(h+\alpha)t} + Be^{-(h-\alpha)t},$$

то, очевидно, мы перейдем к случаю Смолуховского, совершая следующий переход к пределу:

$$\alpha \to h \to \infty, \quad h - \alpha \to \beta. \tag{51}$$

Тогда получаем, полагая $D = 0$,

$$\mathfrak{B} \to \frac{1}{4an^2}(1 - e^{-2\beta t}),$$

$$\mathfrak{C} \to x - ye^{-\beta t}$$

и (49) дает нам формулу Смолуховского

$$f(x, t; x_0) = \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{\pi(1 - e^{-2\beta t})}} \exp\left[-\frac{an^2(x - x_0 e^{-\beta t})^2}{1 - e^{-2\beta t}}\right]. \tag{52}$$

Заметим еще, что эта формула проще получается из формулы распределения скоростей для «свободной» частицы (см. § 8, 56).

§ 8. **«Свободная» частица.** Пусть квази-упругая сила равна нулю, т. е.

$$n^2 = 0. \tag{53}$$

Полагаем, кроме того, для простоты $D = 0$. Теперь имеем

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= h, \\ h + \alpha = 2h, &\quad h - \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

[1] Vorträge über die kinetische Theorie (Wolfskehl-Kongress), Lpz., 1914, 106.

Формулы (39) и (40) приобретают вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{A}=\frac{1}{4a}(1-e^{-4ht}),\\
&\mathfrak{B}=\frac{1}{8ah}\left(\frac{1-e^{-4ht}}{2h}+2t-\frac{2(1-e^{-2ht})}{h}\right),\\
&\mathfrak{C}=\frac{1}{4ah}(-(1-e^{-4ht})+2(1-e^{-2ht}));\\
&\mathfrak{D}=v-we^{-2ht},\quad \mathfrak{E}=x-y-\frac{w}{2h}(1-e^{-2ht}).
\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

Эти значения нужно подставить в (44, 45), тогда получим для «свободной» частицы функцию распределения фаз. Интереснее распределение скоростей и смещений: из (48, 49) получаем

$$f_1(v,\,t;\,v_0)=\sqrt{\frac{a}{\pi\Theta}}\exp\left[-\frac{a(v-v_0e^{-2ht})^2}{\Theta}\right],\tag{56}$$

где $\Theta=1-e^{-4ht}$, и

$$f_2(x,\,t;\;v_0,\,x_0)=2h\sqrt{\frac{a}{\pi\vartheta}}\exp\left[-\frac{4h^2a\left\{x-x_0-\frac{v_0}{2h}(1-e^{-2ht})\right\}^2}{\vartheta}\right],\tag{57}$$

где

$$\vartheta=4ht-3+4e^{-2ht}-e^{-4ht}.$$

Формулы, аналогичные (46, 47), по их очевидности, не выписываем.

Заметим еще, что формулы (56, 57) решают вопрос о распределении угловых скоростей и углов поворота для «свободного» Броуновского вращения частицы вокруг постоянной оси. Действительно, в этом случае «механическое уравнение» имеет вид

$$\mathrm{K}\ddot{\varphi}+\varkappa\dot{\varphi}=M(t),\tag{58}$$

т. е. вплоть до обозначений, совпадает с соответствующим уравнением для поступательного перемещения «свободной частицы». Заменяя, следовательно, в (56, 57) $v$ на $\dot{\varphi}$, $x$ на $\varphi$, $2h$ на $\varkappa/\mathrm{K}$ и придавая $a$ теперь значение $\mathrm{K}N/2RT$ (K — момент инерции), получаем решение нашей задачи.

§ 9. **Постоянная сила.** Полагая в «систематической силе» $De^{ikt}k$ равным нулю, получим случай постоянной силы. Легко видеть, какой вид приобретут теперь $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ (см. формулы 40).

Рассмотрим здесь только случай «свободной» частицы. В этом случае добавочные к $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ члены будут

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_1=-\frac{D}{2h}(1-e^{-2ht}),\\
&\mathfrak{E}_1=\frac{D}{2h}\left(\frac{1-e^{-2ht}}{2h}-t\right),
\end{aligned}\right\}\tag{59}$$

что, как легко проверить, правильно учитывает действие постоянной силы на «свободную частицу». Для этой проверки следует только выписать решение уравнения

$$\ddot{x} + 2hx = D,$$

вводя в него начальные данные $x_0$ и $v_0$.

§ 10. **Систематическая сила — произвольная функция времени.** Пусть вместо «силы» $De^{ikt}$ имеем «силу» — произвольную функцию времени $Q(t)$. Тогда уравнение ($20''$) § 3 примет вид

$$\frac{dz}{dt} = \chi(\lambda) - Q(t)\lambda$$

или, согласно (25)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h}{a}\lambda^2 - \lambda Q(t).$$

Подставив вместо $\lambda$ его выражение (21) и затем вместо постоянных $A$ и $B$ их выражения через $\lambda$ и $\mu$ по формулам (23), получим

$$z - \text{const} = \frac{h}{a}\int_0^t \lambda^2 dt - \frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha}\int_0^t e^{-(h+\alpha)(t-\vartheta)} Q(\vartheta)\, d\vartheta + \\ + \frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha}\int_0^t e^{-(h-\alpha)(t-\vartheta)} Q(\vartheta)\, d\vartheta. \qquad (60)$$

Таким образом, в $\Omega$ (см. 26, 27) на место двух последних членов (тех, что содержат $D$) встанут два последних интеграла формулы (60). Вводя в них новую переменную $t - \vartheta = \eta$, получим

$$-\frac{\lambda(h+\alpha)-\mu}{2\alpha}\int_0^t e^{-(h+\alpha)\eta} Q(t-\eta)\, d\eta + \frac{\lambda(h-\alpha)-\mu}{2\alpha}\int_0^t e^{-(h-\alpha)\eta} Q(t-\eta)\, d\eta. \quad (61)$$

Для распределения скоростей важен коэффициент при $\lambda$, т. е.

$$-\frac{h+\alpha}{2\alpha}\int_0^t e^{-(h+\alpha)\eta} Q(t-\eta)\, d\eta + \frac{h-\alpha}{2\alpha}\int_0^t e^{-(h-\alpha)\eta} Q(t-\eta)\, d\eta, \qquad (62)$$

для распределения координат — коэффициент при $\mu$, т. е.

$$\frac{1}{2\alpha}\int_0^t \left(e^{-(h+\alpha)\eta} - e^{-(h-\alpha)\eta}\right) Q(t-\eta)\, d\eta. \qquad (63)$$

В $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ (см. 40) на место соответствующих членов, содержащих $D$, встанут (62), resp. (63). Таким образом, задача с произвольной «силой» $Q(t)$ решена.

§ **11. Средние.** Обозначая среднее (математическое ожидание) чертой наверху, получаем в силу

$$\sqrt{\frac{c}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c\xi^2}\xi\,d\xi = 0, \quad \sqrt{\frac{c}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c\xi^2}\xi^2\,d\xi = \frac{1}{2c}$$

из § 6 (48, 49):

$$\overline{\mathfrak{D}} = 0, \quad \overline{\mathfrak{E}} = 0, \quad \overline{\mathfrak{D}^2} = 2\mathfrak{A}, \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = 2\mathfrak{B}. \tag{64}$$

Для *«свободной частицы»* (см. § 8 (55)) это дает:

$$\bar{v} = v_0 e^{-2ht}, \quad \bar{x} = x_0 + \frac{v_0}{2h}(1 - e^{-2ht}), \tag{65}$$

$$\overline{v^2} = v_0^2 e^{-4ht} + \frac{1}{2a}(1 - e^{-4ht}) \tag{66}$$

и после простой выкладки

$$\overline{(x - x_0)^2} = \frac{v_0^2}{4h^2}(1 - e^{-2ht})^2 + \frac{t}{2ah} + \frac{1}{4ah^2}\left[\frac{1 - e^{-4ht}}{2} - 2(1 - e^{-2ht})\right] \tag{67}$$

или (см. 57)

$$\overline{(x - x_0)^2} = \frac{v_0^2}{4h^2}(1 - e^{-2ht})^2 + \frac{\vartheta}{8ah^2}, \tag{67'}$$

где $\vartheta$, как и раньше, равно $4ht - 3 + 4e^{-2ht} - e^{-4ht}$. Из последней формулы для малых $ht$ получаем приближенно (до величин порядка $h^3 t^3$)

$$\overline{(x - x_0)^2} = v_0^2 t^2, \tag{67''}$$

а для больших $ht$

$$\overline{(x - x_0)^2} = \frac{v_0^2}{4h^2} + \frac{t}{2ah} - \frac{3}{8ah^2}. \tag{67'''}$$

Пренебрегая крайними членами по сравнению со средним, получаем формулу Эйнштейна

$$\overline{(x - x_0)^2} = \frac{t}{2ah} = \frac{2\overline{v_\infty^2}\,t}{2h}, \tag{67*}$$

где $\overline{v_\infty^2}$ средний квадрат скорости, когда последняя распределена по Максвеллу, равный $^1/_{2a}$.

Для общего случая произвольного начального распределения $G(v, x)$ в формулах (65—67) нужно только заменить $v_0$ и $x_0$ на

$$\bar{v}_0 = \iint_{-\infty}^{+\infty} wG(w, y)\,dw\,dy, \quad \bar{x}_0 = \iint_{-\infty}^{+\infty} yG(w, y)\,dw\,dy \tag{68}$$

и квадраты $v_0$ и $x_0$ на соответствующие средние в момент $t = 0$.

Переходя к случаю *вибратора*, имеем согласно (64) и положив ради простоты внешнюю «систематическую» силу равной нулю:

$$\left.\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{h+\alpha}{2\alpha} e^{-(h+\alpha)t}\{v_0+(h-\alpha)x_0\} - \frac{h-\alpha}{2\alpha} e^{-(h-\alpha)t}\{v_0+(h+\alpha)x_0\},\\ \bar{x} &= -\frac{e^{-(h+\alpha)t}}{2\alpha}\{v_0+(h-\alpha)x_0\} + \frac{e^{-(h-\alpha)t}}{2\alpha}\{v_0+(h+\alpha)x_0\};\end{aligned}\right\} \quad (69)$$

далее, вводя обозначения

$$v_0+(h-\alpha)x_0=\xi, \quad v_0+(h+\alpha)x_0=\eta$$

и пользуясь (69) получаем:

$$\overline{v^2} - \frac{(h+\alpha)^2}{4\alpha^2} e^{-2(h+\alpha)t}\xi^2 - \frac{(h-\alpha)^2}{4\alpha^2} e^{-2(h-\alpha)t}\eta^2 + \frac{h^2-\alpha^2}{2\alpha^2} e^{-2ht}\xi\eta =$$

$$= \frac{h}{4a\alpha^2}\Big[(h+\alpha)(1-e^{-2(h+\alpha)t}) + \quad (70)$$

$$+(h-\alpha)(1-e^{-2(h-\alpha)t}) - \frac{2(h^2-\alpha^2)}{h}(1-e^{-2ht})\Big],$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{x^2} - \frac{1}{4\alpha^2} e^{-2(h+\alpha)t}\xi^2 - \frac{1}{4\alpha^2} e^{-2(h-\alpha)t}\eta^2 + \frac{1}{2\alpha^2} e^{-2ht}\xi\eta =\\ &= \frac{h}{4a\alpha^2}\left[\frac{1-e^{-2(h+\alpha)t}}{h+\alpha} + \frac{1-e^{-2(h-\alpha)t}}{h-\alpha} - \frac{2(1-e^{-2ht})}{h}\right].\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

В общем случае следует снова заменить $v_0$, $x_0$, $v_0^2$, $x_0^2$ на их средние. Как и должно быть для рассматриваемого случая не только $\overline{v^2}$, но и $\overline{x^2}$ стремится с возрастанием $t$ к значению, не зависящему от $t$, а именно

$$\frac{1}{2a(h^2-\alpha^2)} = \frac{1}{2an^2} = \frac{\overline{v^2_\infty}}{n^2},$$

что верно согласно закону равнораспределения энергии. Не представляет труда включить в круг рассмотрения и «систематические силы»: (64) и тут позволяет сразу написать соответствующие формулы, почему мы их и не выписываем.

### § 12. О некоторых дифференциальных уравнениях для $f_1$ и $f_2$ в случае

$$G(w, y) = \delta(w-v_0)\,\delta(y-x_0).$$

Сравнивая выражения (48, 49), справедливые для нашего случая, с хорошо известным «главным решением» уравнения теплопроводности (или диффузии), убеждаемся, что $f_1$ и $f_2$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{A}} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathfrak{D}^2}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{B}} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial \mathfrak{C}^2}. \quad (73)$$

С другой стороны, в силу (40) [где вместо $w$ и $y$ нужно подставить $v_0$ и $x_0$] имеем

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \mathfrak{D}^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial \mathfrak{E}^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \tag{74}$$

и далее

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{A}} \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{D}} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{B}} \frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{E}} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t},$$

что (см. 39 и 40) дает:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{A}} \frac{h}{4a\alpha^2} [(h+\alpha) e^{-(h+\alpha)t} - (h-\alpha) e^{-(h-\alpha)t}]^2 + \\ + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{D}} \left[ \frac{(h+\alpha)^2}{2\alpha} e^{-(h+\alpha)t} \xi - \frac{(h-\alpha)^2}{2\alpha} e^{-(h-\alpha)t} \eta \right]$$

и

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{B}} \frac{h}{4a\alpha^2} (e^{-(h+\alpha)t} - e^{-(h-\alpha)t})^2 + \\ + \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{E}} \left[ -\frac{(h+\alpha) e^{-(h+\alpha)t}}{2\alpha} \xi + \frac{(h-\alpha) e^{-(h-\alpha)t}}{2\alpha} \eta \right],$$

где для простоты в выражениях (40) положено $D = 0$ и кроме того, как и раньше,

$$\xi = v_0 + (h-\alpha) x_0, \quad \eta = v_0 + (h+\alpha) x_0.$$

Принимая во внимание (72, 73, 74) можем окончательно написать:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{h}{4a\alpha^2} [(h+\alpha) e^{-(h+\alpha)t} - (h-\alpha) e^{-(h-\alpha)t}]^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} + \\ + \left[ \frac{(h+\alpha)^2}{2\alpha} e^{-(h+\alpha)t} \xi - \frac{(h-\alpha)^2}{2\alpha} e^{-(h-\alpha)t} \eta \right] \frac{\partial f_1}{\partial v}, \tag{75}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{h}{4a\alpha^2} [e^{-(h+\alpha)t} - e^{-(h-\alpha)t}]^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \\ + \left[ -\frac{h+\alpha}{2\alpha} e^{-(h+\alpha)t} \xi + \frac{h-\alpha}{2\alpha} e^{-(h-\alpha)t} \eta \right] \frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{76}$$

Из (75, 76) заключаем, что для времен, для коих можно считать свободное движение затухшим, $f_1$ и $f_2$ становятся стационарными, приняв практически предельные ($t \to \infty$) свои значения.

Не то будет для «свободной частицы». Здесь (75, 76) принимают вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{h}{a} e^{-4ht} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} + 2he^{-2ht} v_0 \frac{\partial f_1}{\partial v}, \tag{75'}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{1}{4ah} (1 - e^{-2ht})^2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - v_0 e^{-2ht} \frac{\partial f_2}{\partial x}, \tag{76'}$$

что легко получается, если воспользоваться (54). Здесь для времен, когда свободное движение практически погасло, $\partial f_1/\partial t = 0$ и одновременно $f_2$ повинуется уравнению диффузии:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{1}{4ah}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}. \tag{77}$$

Таким образом, для рассматриваемых времен скорости распределены по Максвеллу, а функция распределения координат начинает практически удовлетворять дифференциальному уравнению диффузии, результат, как нами показано в другом месте, общий, не связанный с нашим предположением о начальном распределении.

**Дополнение I.** Решение нашей задачи было сведено нами к интегрированию системы уравнений (20′):

$$\frac{d\lambda}{dt} = 2h\lambda - \mu, \quad \frac{d\mu}{dt} = n^2\lambda. \tag{78}$$

Исключая $\mu$, получаем:

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} - 2h\frac{d\lambda}{dt} + n^2\lambda = 0, \tag{79}$$

а это, если *изменить знак времени на обратный*, совпадает с «механическим» нашим уравнением

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + n^2 x = 0. \tag{80}$$

Таким образом, сразу можем написать первую из формул (21); вторую получаем квадратурой из второго уравнения (78), если еще вспомним, что

$$n^2 = h^2 - \alpha^2.$$

Система (78) есть система *присоединенная* (адъюнгированная) к «механической» системе (см. 1):

$$\dot{v} + 2hv + n^2 x = 0, \quad \dot{x} - v = 0. \tag{81}$$

Действительно, система присоединенная к системе

$$\dot{\xi}_r = \sum_s p_{rs}\xi_s, \tag{82}$$

есть

$$\dot{\eta}_r = -\sum_s p_{sr}\eta_s, \tag{83}$$

и легко проверить для (78, 81), что они находятся в этом взаимоотношении. Из (82, 83), как известно, следует

$$\sum_r \xi_r\eta_r = \text{const}, \tag{84}$$

откуда легко получить наши формулы (23).

Причина того, что у нас появляется именно присоединенная система (к системе 81), нами выяснена в другом месте.

**Дополнение II.** Не трудно уяснить себе, почему в общей формуле (44) для плотности вероятности фаз в показателе появляется квадратичная форма, *союзная* форме

$$\mathfrak{A}\lambda^2 + \mathfrak{B}\mu^2 + \mathfrak{C}\lambda\mu.$$

Написав вместо $\lambda$, $\mu$ — величин чисто мнимых, $ip$, $iq$, имеем для показателя в формуле (38), обозначенного там прямыми скобками:

$$[\,] = -(\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}pq - i\mathfrak{D}p - i\mathfrak{E}q). \tag{85}$$

Освобождаясь от линейных членов, получаем

$$[\,] = -[\mathfrak{A}p'^2 + \mathfrak{B}q'^2 + \mathfrak{C}p'q' - (\mathfrak{A}p_0^2 + \mathfrak{B}q_0^2 + \mathfrak{C}p_0 q_0)], \tag{86}$$

где

$$p_0 = \frac{i}{\Delta}(2\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{C}\mathfrak{E}), \quad q_0 = \frac{i}{\Delta}(-\mathfrak{C}\mathfrak{D} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{E}) \tag{87}$$

и

$$\Delta = 4\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2. \tag{88}$$

Отсюда

$$[\,] = -\{\mathfrak{A}p'^2 + \mathfrak{B}q'^2 + \mathfrak{C}p'q'\} - \frac{1}{\Delta}(\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}), \tag{89}$$

что и объясняет появление союзной формы. Приводя квадратичную форму $\{\,\}$ к сумме квадратов

$$\{\,\} = \mathfrak{A}p''^2 + \frac{4\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}{4\mathfrak{A}} q'^2 \tag{90}$$

и выполняя интегрирование по $p''$ и $q'$, получаем

$$\sqrt{\frac{\pi}{\mathfrak{A}}}\sqrt{\frac{4\mathfrak{A}\pi}{4\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}} \exp\left[-\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{4\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{C}^2}\right], \tag{91}$$

что при делении на $4\pi^2$ и дает нам формулу (44), resp. (45).

Научно-исследовательский Физический институт
при Ленинградском государственном университете.
Осень 1933 — весна 1934.

## G. KRUTKOW. DIE BROWNSCHE BEWEGUNG DES VIBRATORS

ZUSAMMENFASSUNG

Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Brownschen Bewegung eines Systems von einem Freiheitsgrad, welches der Differentialgleichung

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q(t) + P(t)$$

genügt. Hier sind $a$, $b$, $c$ Konstanten, $Q(t)$ eine vorgegebene «systematische» Kraft, $P(t)$ die «zufällige» Kraft.

Die hauptsächlichen Resultate sind ohne ausführliche Beweise in den in deutscher Sprache abgefassten Notizen C. R. Acad. d. Sci. URSS **I**, 1934, 482, **III**, 1934, 218 gegeben, hier sei nur der Inhalt dieser Arbeit angeführt: Einleitung; § 1 Die Integralgleichung des Problems; §§ 2, 3 Ihre Lösung; § 4 Der Grenzfall $t \to \infty$; § 5 Einführung der Anfangsverteilung; § 6 Die Verteilung der Geschwindigkeiten und Koordinaten; § 7 Der Fall von Smoluchowski; § 8 Das «freie» Teilchen; § 9 Eine konstante Kraft; § 10 Die systematische Kraft ist eine beliebige Funktion der Zeit; § 11 Mittelwerte; § 12 Über einige Differentialgleichungen für $f_1$ und $f_2$ im Falle

$$f(w, y, 0) = \delta(w - v_0)\,\delta(y - x_0).$$

Die Zusätze I und II enthalten einige mathematische Ergänzungen.

Herbst 1933 — Sommer 1934.

Physikalisches Institut
der Universität Leningrad.

---

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

# ВЫНУЖДЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ УЧЕТЕ ЗАТУХАНИЯ

А. П. ФИЛИППОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Крыловым)

**1.** Поперечные колебания стержней при учете явления внутреннего и внешнего затухания для некоторых случаев загружения стержня рассматривались уже несколькими авторами.[1]

В дальнейшем будем рассматривать колебание стержня, находящегося под действием периодической нагрузки, непрерывной или прерывной, причем с осью стержня могут быть связаны сосредоточенные массы.

Допуская, что при колебании внутреннее затухание будет линейной функцией скорости деформации волокон стержня, а внешнее затухание пропорционально скорости перемещения точек оси стержня, дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня, при учете поправки от инерции поворота сечений, можно записать в виде:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\xi I\frac{\partial^5 y}{\partial t\,\partial x^4}-\frac{\gamma I}{g}\frac{\partial^4 y}{\partial t^2\,\partial x^2}+\xi_a\frac{\partial x}{\partial t}=F(x,t) \tag{1}$$

где

$y(x,t)$ — перемещение точки нейтральной оси стержня с абсциссой $x$

$A$ — площадь поперечного сечения стержня

$I$ — момент инерции поперечного сечения стержня

$\gamma$ — вес единицы объема

$\xi$ — коэффициент, характеризующий внутреннее затухание, $\xi_a$ — внешнее

$F(x,t)$ — интенсивность внешней нагрузки, действующей на стержень.

Обычно внешнее затухание существенной роли не играет и в дальнейшем будем полагать $\xi_a=0$, причем однако все выводы и формулы без всяких затруднений распространяются и на случай, когда $\xi_a \neq 0$.

[1] Ztschr. f. Angew. Math. u. Mech.: H. Holzer, Bd. 8 (1928), S. 272; K. Muto, Bd. 10 (1930), S. 346; K. Sezawa, Bd. 12 (1932), S. 275.

Будем предполагать, что внешняя нагрузка задана или в виде пульсирующей непрерывно распределенной по длине балки нагрузки

$$q_1(x)\sin kt + q_2(x)\cos kt,$$

или в виде пульсирующих сосредоточенных сил

$$Q_i = Q_i^{(1)}\sin kt + Q_i^{(2)}\cos kt, \tag{2}$$

приложенных в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

С осью стержня могут быть связаны сосредоточенные грузы $W_1, W_2, \ldots W_n$, приложенные в тех же точках $x_1, x_2, \ldots x_n$; в общем решении можно будет полагать некоторые $Q_i$ или $W_i$ равными нулю без нарушения общности.

Постоянную нагрузку на стержень в расчет не принимаем, так как она влияния на установившееся колебание стержня не оказывает.

Свободные колебания стержня, которые со временем затухают, также во внимание не принимаются.

При нахождении решения уравнения (1), чтобы избежать условий сопряжения, при наличии сосредоточенных нагрузок, будем находить решение уравнения в согласии с методом, развитым акад. А. Н. Крыловым («О расчете балок, лежащих на упругом основании»).

Сосредоточенные нагрузки $W_1, W_2 \ldots Q_1, Q_2$, приложенные в точке $x_1, x_2 \ldots x_n$, будем предполагать равномерно распределенными по закону прямоугольника в интервале от $x_i$ до $x_i + \sigma_i (i = 1, 2 \ldots)$ интенсивностью $w_i$ и $q_i$ на единицу длины, в предположении, что

$$q_i\sigma_i \to Q_i,\ w_i\sigma_i \to W_i \quad \text{когда} \quad \sigma_i \to 0. \tag{3}$$

Таким образом

$$F(x,t) = -\frac{w_i}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q_1(x)\sin kt + q_2(x)\cos kt, \tag{4}$$

причем $w_1$, а также $q_1$ и $q_2$ (в том случае, когда они заданы в виде сосредоточенных нагрузок), везде равны нулю за исключением интервалов

$$x_1 \leqq x \leqq x_1 + \sigma_1,\ x_2 \leqq x \leqq x_2 + \sigma_2 \ldots$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x_1 t) = \varphi(x)\sin kt + \psi(x)\cos kt. \tag{5}$$

Подставляя $y(x,t)$ в уравнение (1) и вводя переменную

$$\eta = \frac{x}{l},$$

получим для определения $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ следующую систему линейных дифференциальных уравнений:

(6)
$$\frac{d^4\varphi}{d\eta^4}+b_2\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}-\beta^2\varphi-\mu\frac{d^4\psi}{d\eta^4}=f_1(\eta),$$
$$\frac{d^4\psi}{d\eta^4}+b_2\frac{d^2\psi}{d\eta^2}-\beta^2\psi+\mu\frac{d^4\varphi}{d\eta^4}=f_2(\eta),$$

где обозначено

(4)′
$$f_1(\eta)=\left[q_1+\frac{w}{g}k^2\varphi(\eta)\right]\frac{l^4}{EI},\quad f_2(\eta)=\left[q_2+\frac{w}{g}k^2\psi(\eta)\right]\frac{l^4}{EI},$$

(7)
$$\beta^2=\frac{l^4k^2}{a^2},\quad a^2=\frac{EIg}{A\gamma},\quad b_2=\beta^2\frac{r^2}{l^2},\quad r^2=\frac{I}{A};\quad \mu=\frac{k\xi}{E}.$$

**2.** Рассмотрим сперва случай, когда левый конец стержня оперт. При таком закреплении необходимо удовлетворить условия

(8)
$$\varphi(0)=0,\ \varphi''(0)=0;\quad \psi(0)=0,\ \psi''(0)0,$$

при этом

(8′)
$$\varphi'(0)=\omega_2,\ \varphi'''(0)=\omega_4;\quad \psi'(0)=\nu_2,\ \psi'''(0)=\nu_4,$$

где $\omega_2, \omega_4, \nu_2, \nu_4$ произвольные постоянные.

Применяя символический метод Heaviside'а и вводя в согласии с этим методом символ $\frac{1}{p}$ для обозначения интеграла в пределах от $O$ до $\eta$, получим согласно (8) и (8′) для значений производных от $\varphi$ выражения

$$\varphi=\int_0^\eta\frac{d\varphi}{d\eta}d\eta=\frac{1}{p}\frac{d\varphi}{d\eta},\quad \frac{d\varphi}{d\eta}=$$
$$=\int_0^\eta\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}d\eta+\omega_2=\frac{1}{p}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}+\omega_2,\quad \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}=\frac{1}{p}\frac{d^3\varphi}{d\eta^3},\quad \frac{d^3\varphi}{d\eta^3}=\frac{1}{p}\frac{d^4\varphi}{d\eta^4}+\omega_4,$$

или

$$\frac{d\varphi}{d\eta}=p\varphi,\ \frac{d^2\varphi}{d\eta^2}=p^2\varphi-p\omega_2,\ \frac{d^3\varphi}{d\eta^3}=p^3\varphi-p^2\omega_2,\ \frac{d^4\varphi}{d\eta^4}=p^4\varphi-p^3\omega_2-p\omega_4.$$

Аналогичным образом

$$\frac{d\psi}{d\eta}=p\psi,\ \frac{d^2\psi}{d\eta^2}=p^2\psi-p\nu_2,\ \frac{d^3\psi}{d\eta^3}=p^3\psi-p_2\nu_2,\ \frac{d^4\psi}{d\eta^4}=p^4\psi-p^3\nu_2-p\nu_4.$$

Следовательно система (6) в символической форме будет

(9)
$$p^4\varphi+b_2p^2\varphi-\beta^2\varphi-\mu p^4\psi=f_1(\eta)+F_1(p),$$
$$p^4\psi+b_2p^2\psi-\beta^2\psi+\mu p^4\varphi=f_2(\eta)+F_2(p),$$

где

$$(10)\qquad \begin{aligned} F_1(p) &= p^3\omega_2 + p(\omega_4 + b_2\omega_2) - \mu p(p^2\nu_2 + \nu_4),\\ F_2(p) &= p^3\nu_2 + p(\nu_4 + b_2\nu_2) + \mu p(p^2\omega_2 + \omega_4). \end{aligned}$$

Из системы уравнений (9) получим для определения $\varphi$ и $\psi$ уравнения

$$(11)\qquad \begin{aligned} &[(p^4 + b_2p^2 - \beta^2)^2 + \mu^2 p^8]\varphi =\\ &= (p^4 + b_2p^2 - \beta^2)[f_1(\eta) + F_1(p)] + \mu p^4[f_2(\eta) + F_2(p)],\\ &[(p^4 + b_2p^2 - \beta^2)^2 + \mu^2 p^8]\psi =\\ &= -\mu p^4[f_1(\eta) + F_1(p)] + (p^4 + b_2p^2 - \beta^2)[f_2(\eta) + F_2(p)]. \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения

$$(12)\qquad H(p) = (p^4 + b^2p^2 - \beta^2)^2 + \mu^2 p^8 = 0$$

или уравнений

$$(12')\qquad H_1(p) = (1 + \mu i)p^4 + b_2p^2 - \beta^2 = 0,\ H_2(p) = (1 - \mu i)p^4 + b_2p^2 - \beta^2 = 0$$

будут

$$(13)\qquad \begin{aligned} &p_1 = r - r_1 i,\ p_2 = s + s_1 i,\ p_3 = -(r - r_1 i),\ p_4 = -(s + s_1 i),\\ &p_5 = r + r_1 i,\ p_6 = s - s_1 i,\ p_7 = -(r + r_1 i),\ p_8 = -(s - s_1 i) \end{aligned}$$

причем $p_1 \dots p_4$ корни первого из уравнений (12′) $p_5 \dots p_8$ второго.

Значения $r, r_1, s$ и $s_1$ будут

$$(14)\qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2} + \frac{\lambda}{2}}, & r_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2} - \frac{\lambda}{2}},\\ s &= \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda'^2 + \lambda_1'^2} - \frac{\lambda'}{2}}, & s_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\lambda'^2 + \lambda_1'^2} + \frac{\lambda'}{2}}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda = \frac{-b_2 + c_1}{2(1 + \mu^2)},\quad \lambda_1 = \frac{-b_2\mu + c_2}{2(1 + \mu^2)},\quad \lambda' = \frac{b_2 + c_1}{2(1 + \mu^2)},\quad \lambda_1' = \frac{b_2\mu + c_2}{2(1 + \mu^2)}.$$

Для $c_1$ и $c_2$ имеем значения

$$c_1 = \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{2}\left\{\sqrt{(b_2^2 + 4\beta^2)^2 + 16\beta^4\mu^2} + b_2^2 + 4\beta^2\right\} - b_2^2\mu^2},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{2}\left\{\sqrt{(b_2^2 + 4\beta^2)^2 + 16\beta^4\mu^2} - (b_2^2 + 4\beta^2)\right\} + b_2^2\mu^2}.$$

Разлагая рациональные дроби на простейшие и принимая во внимание уравнения (12′), которым удовлетворяют корни $p_1 \ldots p_4$, $p_5 \ldots p_8$, получим для $\varphi$ значение

$$\varphi = \sum_{k=1}^{4} \frac{-\mu p_k^4 i\,[f_1(\eta) + F_1(p_k)] + \mu p_k^4 [f_2(\eta) + F_2(p_k)]}{(p - p_k)\,H_1'(p_k)\,H_2(p_k)} +$$

$$+ \sum_{k=5}^{8} \frac{\mu p_k^4 i\,[f_1(\eta) + F_1(p_k)] + \mu p_k^4 [f_2(\eta) + F_2(p_k)]}{(p - p_k)\,H_2'(p_k)\,H_1(p_k)}.$$

Отсюда

$$\varphi = -\sum_{k=1}^{4} \frac{p_k \{f_1(\eta) + F_1(p_k) + [f_2(\eta) + F_2(p_k)]\,i\}}{4\,(p_k^2 - 2\beta^2)\,(p - p_k)} - \qquad (15)$$

$$- \sum_{k=5}^{8} \frac{p_k \{f_1(\eta) + F_1(p_k) - [f_2(\eta) + F_2(p_k)]\,i\}}{4\,(p_k^2 - 2\beta^2)\,(p - p_k)}.$$

Аналогичным образом $\psi$ определяется из выражения

$$\psi = -\sum_{k=1}^{4} \frac{p_k \{f_1(\eta) + F_1(p_k) + [f_2(\eta) + F_2(p_k)]\,i\}}{4i\,(p_k^2 - 2\beta^2)\,(p - p_k)} + \qquad (16)$$

$$+ \sum_{k=5}^{8} \frac{p_k \{f_1(\eta) + F_1(p_k) - [f_2(\eta) + F_2(p_k)]\,i\}}{4i\,(p_k^2 - 2\beta^2)\,(p - p_k)}.$$

Переходя от символов к соответствующим дифференциальным уравнениям, т. е. интерпретируя $(p - p_k)^{-1} f$ как уравнение $(p - p_k) z = f(\eta)$, получим после вычислений частное решение системы (6) без правой части, соответствующее значениям $F_1$ и $F_2$ в равенствах (15) и (16), в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= -A \operatorname{sh} r\eta \cos r_1\eta + B \operatorname{ch} r\eta \sin r_1\eta - C \operatorname{sh} s\eta \cos s_1\eta + D \operatorname{ch} s\eta \sin s_1\eta, \\ \psi_1(\eta) &= \phantom{-}B \operatorname{sh} r\eta \cos r_1\eta + A \operatorname{ch} r\eta \sin r_1\eta - D \operatorname{sh} s\eta \cos s_1\eta - C \operatorname{ch} s\eta \sin s_1\eta, \end{aligned} \qquad (17)$$

причем после вычислений вместо постоянных $\omega_2, \omega_4, \nu_2, \nu_4$ введены другие постоянные $A$, $B$, $C$ и $D$, связанные с ними линейными соотношениями.

Решение системы уравнений (5)

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= \varphi_1(\eta) + \Phi(\eta), \\ \psi(\eta) &= \psi_1(\eta) + \Psi(\eta), \end{aligned} \qquad (18)$$

где $\Phi(\eta)$ и $\Psi(\eta)$ частные решения уравнений (6) с правой частью, соответствующие функциям $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ в равенствах (15) и (16). Частные решения

уравнений Ф и Ψ, как это следует из символического метода интегрирования, удовлетворяют условиям

$$
(19) \quad \begin{aligned} &\Phi(0)=0,\ \Phi'(0)=0,\ \Phi''(0)=0,\ \Phi'''(0)=0; \\ &\Psi(0)=0,\ \Psi'(0)=0,\ \Psi''(0)=0,\ \Psi'''(0)=0. \end{aligned}
$$

В том случае, когда внешняя нагрузка задана в виде непрерывной периодической функции по всей длине стержня или на некоторой его части, частные решения могут быть получены без особых затруднений, исходя из (15) и (16), путем вычисления соответствующих интегралов, после перехода от символов к уравнениям.

Рассмотрим подробнее частный случай, когда на стержень действует периодическая сила в точке $\eta=\eta_1$, причем в этой точке имеется также и сосредоточенная масса весом $W_1$.

В этом случае для функций $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ имеем согласно (4′) $f_1(\eta)=0$ и $f_2(\eta)=0$,

для $0\leqq\eta\leqq\eta_1$, и $\eta_1+\varepsilon_1\leqq\eta\leqq 1\left(\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{l}\right)$,

$$
f_1(\eta)=\frac{w_1 l^4}{gEI}k^2[\varphi_1(\eta)+\Phi]+\frac{l^4}{EI}q_1 \text{ и } f_2(\eta)=\frac{w_1 l^4}{gEI}k^2[\psi_1(\eta_1)+\Psi]+\frac{l^4}{EI}q_2
$$

$$
\text{для } \eta_1\leqq\eta\leqq\eta_1+\varepsilon_1.
$$

Согласно (15) и (16) имеем для частных решений Ф и Ψ значения

$$
\Phi(\eta)=-\int\limits_{\eta_1}^{\eta_1+\varepsilon_1}\sum_{k=1}^{4}\frac{p_k[f_1(\eta)+f_2(\eta)i]}{4(p_k^2-2\beta^2)}e^{p_k(\eta-t)}\,dt-\int\limits_{\eta_1}^{\eta_1+\varepsilon_1}\sum_{k=5}^{8}\frac{p_k[f_1(\eta)-f_2(\eta)i]}{4(p_k^2-2\beta^2)}e^{p_k(\eta-t)}\,dt
$$

$$
\Psi(\eta)=-\int\limits_{\eta_1}^{\eta_1+\varepsilon_1}\sum_{k=1}^{4}\frac{p_k[f_1(\eta)-f_2(\eta)i]}{4i(p_k^2-2\beta^2)}e^{p_k(\eta-t)}\,dt+\int\limits_{\eta_1}^{\eta_1+\varepsilon_1}\sum_{k=5}^{8}\frac{p_k[f_1(\eta)-if_2(\eta)]}{4i(p_k^2-2\beta^2)}e^{p_k(\eta-t)}\,dt.
$$

Переходя к пределу в предположении, что $q_1\varepsilon_1 l\rightarrow Q_1$, $w_1\varepsilon_1 l\rightarrow W$ когда $\varepsilon_1\rightarrow 0$ (условие (3)), получим, принимая во внимание, что в пределе интегралы, содержащие Ф и Ψ, исчезнут, частное решение системы (6) в виде

(20) $\Phi=0$ для $0\leqq\eta\leqq\eta_1$,

$$
\begin{aligned}\Phi(\eta-\eta_1)=&-\alpha_1\operatorname{sh}r(\eta-\eta_1)\cos r_1(\eta-\eta_1)+\beta_1\operatorname{ch}r(\eta-\eta_1)\sin r_1(\eta-\eta_1)+\\ &+\gamma_1\operatorname{sh}s(\eta-\eta_1)\cos s_1(\eta-\eta_1)-\delta_1\operatorname{ch}s(\eta-\eta_1)\sin s_1(\eta-\eta_1) \text{ для } \eta_1\leqq\eta\leqq 1;\end{aligned}
$$

(21) $\Psi=0$ для $0\leqq\eta\leqq\eta_1$,

$$
\begin{aligned}\Psi_1(\eta-\eta_1)=&\ \beta_1\operatorname{sh}r(\eta-\eta_1)\cos r_1(\eta-\eta_1)+\alpha_1\operatorname{ch}r(\eta-\eta_1)\sin r_1(\eta-\eta_1)+\\ &+\delta_1\operatorname{sh}s(\eta-\eta_1)\cos s_1(\eta-\eta_1)+\gamma_1\operatorname{ch}s(\eta-\eta_1)\sin s_1(\eta-\eta_1) \text{ для } \eta_1\leqq\eta\leqq 1,\end{aligned}
$$

где

(22)
$$\alpha_1 = -\frac{2\beta^2}{K}\left\{\beta^2 m_1[\varphi_1(\eta_1)r + \psi(\eta_1)r_1] + \frac{l^3}{EI}(Q_1 r + Q_2 r_1)\right\},$$
$$\beta_1 = -\frac{2\beta^2}{K}\left\{\beta^2 m_1[\varphi_1(\eta_1)r_1 - \psi_1(\eta_1)r] + \frac{l^3}{EI}(Q_1 r_1 - Q_2 r)\right\}$$
$$\gamma_1 = \frac{2\beta^2}{K_1}\left\{\beta^2 m_1[\varphi_1(\eta_1)s - \psi_1(\eta_1)s_1] + \frac{l^3}{EI}(Q_1 s - Q_1 s_1)\right|,$$
$$\delta_1 = \frac{2\beta^2}{K_1}\left|\beta^2 m_1[\varphi_1(\eta_1)s_1 + \psi_1(\eta)s] + \frac{l^3}{EI}(Q_1 s_1 + Q_2 s)\right|$$

причем

$$m_1 = \frac{W_1}{A\gamma l},\ K = 4\beta^4 - 4b_2\beta^2\lambda + b_2^2(\lambda^2 + \lambda_1^2),$$
$$K_1 = 4\beta^4 + 4b_2\beta^2\lambda_1 + b_2^2(\lambda'^2 + \lambda_/'^2).$$

Без всяких затруднений можно написать общее решение в том случае, когда имеется несколько периодических сил $Q_1\ Q_2$ согласно (2) и сосредоточенных грузов $W_1, W_2, \ldots$, приложенных в точках $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Если инерцией поворота сечений можно пренебречь, то необходимо положить

(23)
$$s = r_1,\ s_1 = r$$

и тогда решение системы уравнений (6) будет для первого интервала $0 \leq \eta \leq \eta_1$

(17′)
$$\varphi(\eta) = \varphi_1(\eta) = -A\,\mathrm{sh}\,r\eta\cos r_1\eta +$$
$$+ B\,\mathrm{ch}\,r\eta\sin r_1\eta - C\,\mathrm{sh}\,r_1\eta\cos r\eta + D\,\mathrm{ch}\,r_1\eta\sin r\eta,$$
$$\psi(\eta) = \psi_1(\eta) = B\,\mathrm{sh}\,r\eta\cos r_1\eta +$$
$$+ A\,\mathrm{ch}\,r\eta\sin r_1\eta - D\,\mathrm{sh}\,r_1\eta\cos r\eta - C\,\mathrm{ch}\,r_1\eta\sin r\eta$$

и для интеграла $\eta_k \leq \eta \leq \eta_{k+1}$

(24)
$$\varphi(\eta) = \varphi_1(\eta) + \sum_{k=1}^{k}\Phi_i(\eta - \eta_i)$$
$$\psi(\eta) = \psi_1(\eta) + \sum_{k=1}^{k}\Psi_i(\eta - \eta_i)$$

где

$$\Phi_i(\eta - \eta_i) = -\alpha_i\,\mathrm{sh}\,r(\eta - \eta_i)\cos r_1(\eta - \eta_i) + \beta_i\,\mathrm{ch}\,(\eta - \eta_i)\sin r_1(\eta - \eta_i) -$$
$$- \beta_i\,\mathrm{sh}\,r_1(\eta - \eta_i)\cos r(\eta - \eta_i) + \alpha_i\,\mathrm{ch}\,r_1(\eta - \eta_i)\sin r(\eta - \eta_i),$$
$$\Psi_i(\eta - \eta_i) = \beta_i\,\mathrm{sh}\,r(\eta - \eta_i)\cos r_1(\eta - \eta_i) + \alpha_i\,\mathrm{ch}\,r(\eta - \eta_i)\sin r_1(\eta - \eta_i) -$$
$$- \alpha_i\,\mathrm{sh}\,r_1(\eta - \eta_i)\cos r(\eta - \eta_i) - \beta_i\,\mathrm{ch}\,r_1(\eta - \eta_i)\sin r(\eta - \eta_i)$$

значения $\alpha_i$ и $\beta_i$ будут

$$(22')\quad \begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{1}{2} m_i [\varphi(\eta_i) r + \psi(\eta_i) r_1] - \frac{l^3}{2EI\beta^2}(Q_i^{(1)} r + Q_i^{(2)} r_1), \\ \beta_i &= -\frac{1}{2} m_i [\varphi(\eta_i) r_1 - \psi(\eta_i r)] - \frac{l^3}{2EI\beta^2}(Q_i^{(1)} r_1 - Q_i^{(2)} r). \end{aligned}$$

**3.** Если бы левый конец был бы закреплен, то удовлетворяя условиям закрепления

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0;\ \psi(0) = 0,\ \psi'(0) = 0,$$

следовало бы при пользовании символическим методом, подставить в уравнения (6) вместо производных от $\varphi$ и $\psi$ их символические выражения

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = p^2\varphi,\ \frac{d^4\varphi}{d\eta^4} = p^4\varphi - p^2\omega_3 - p\omega_4,\ \frac{d^2\psi}{d\eta^2} = p^2\psi,\ \frac{d^4\psi}{d\eta^4} = p^4\psi - p^2\omega_3 - p\nu_4,$$

где

$$\omega_3 = \varphi''(0),\ \omega_4 = \varphi'''(0),\ \psi''(0) = \nu_3,\ \psi'''(0) = \nu_4.$$

После вычислений получим частное решение системы (6) в виде

$$(25)\quad \begin{aligned} \varphi_1(\eta) &= -A(\operatorname{ch} r\eta \cos r_1\eta - \operatorname{ch} s\eta \cos s_1\eta) + B(\operatorname{sh} r\eta \sin r_1\eta + \operatorname{sh} s\eta \sin s_1\eta) - \\ &- C(\operatorname{sh} r\eta \cos r_1\eta - \operatorname{ch} s\eta \sin s_1\eta) + D(\operatorname{ch} r\eta \sin r_1\eta - \operatorname{sh} s\eta \cos s_1\eta), \\ \psi_1(\eta) &= B(\operatorname{ch} r\eta \cos r_1\eta - \operatorname{ch} s\eta \cos s_1\eta) + [A(\operatorname{sh} r\eta \sin r_1\eta + \operatorname{sh} s\eta \sin s_1\eta) + \\ &+ C(\operatorname{ch} r\eta \sin s_1\eta - \operatorname{sh} r\eta \cos s_1\eta) + D(\operatorname{sh} r\eta \cos r_1\eta - \operatorname{ch} s\eta \sin s_1\eta), \end{aligned}$$

где по прежнему после вычислений, вместо постоянных $\omega_3, \omega_4, \nu_3, \nu_4$ введены $A$, $B$, $C$ и $D$, связанные с ними линейными соотношениями. В случае, если пренебречь инерцией поворота сечений, то необходимо положить

$$s = r_1,\ s_1 = r.$$

Решение уравнений (6) определяется так же, как и для опертых концов

$$(18)\qquad \varphi(\eta) = \varphi_1(\eta) + \Phi(\eta),\ \Psi(\eta) = \psi_1(\eta) + (\eta),$$

где $\Phi(\eta)$ и $\Psi(\eta)$ вычисляются согласно (20), (21) и (24), причем способ закрепления левого конца, благодаря условиям (19), влияния на их значения не оказывает и при наличии даже непрерывной нагрузки.

**4.** Подчиняем общее решение (18) условиям для правого конца $x = l\ (\eta = 1)$, в зависимости от заданного способа закрепления.

(I) $\varphi(0) = 0,\ \varphi'' = 0,\ \psi = 0,\ \psi'' = 0$ для опертого конца $\eta = 1$,

(II) $\varphi = 0,\quad \varphi' = 0,\ \psi = 0,\ \psi' = 0$ для закрепленного конца $\eta = 1$.

Для свободного конца $x = l$ необходимо, чтобы изгибающий момент $M$ и перерезывающая сила $S$ обращались в нуль, т. е.

(III)
$$\left.\begin{aligned} -\frac{EI}{l^2}(\varphi'' - \mu\psi'') = 0, \quad -\frac{EI}{l^3}(\varphi''' - \mu\psi''' + b_2\varphi') = 0 \\ -\frac{EI}{l^2}(\psi'' + \mu\varphi'') = 0, \quad -\frac{EI}{l^3}(\psi''' + \mu\varphi''' + b_2\psi') = 0 \end{aligned}\right\} \text{для свободного конца } \eta = 1.$$

или, когда $b_2 = 0$

(III′)
$$\varphi'' = 0, \ \psi'' = 0, \ \varphi''' = 0, \ \psi''' = 0 \ \text{ для } \ \eta = 1.$$

Удовлетворяя заданному условию закрепления для $\eta = 1$, получим систему линейных уравнений относительно $A, B, C, D$, из которой и найдутся их значения.

В частности для опертых концов $\eta = 0$ и $\eta = 1$ для стержня, находящегося под действием периодической силы $Q$, приложенной в точке $\eta = \eta_1$ и при наличии сосредоточенного груза $W_1$, можно получить значения $A, B, C$ и $D$, входящих в решение (18) в виде

(26)
$$\begin{aligned} A &= k \operatorname{sh} r \cos r_1 - l \operatorname{ch} r \sin r_1, \quad B = -l \operatorname{sh} r \cos r_1 - k \operatorname{ch} r \sin r_1 \\ C &= k_1 \operatorname{sh} s \cos s_1 - l_1 \operatorname{ch} s \sin s_1, \quad D = -l_1 \operatorname{sh} s \cos s_1 - k_1 \operatorname{ch} s \sin s_1 \end{aligned}$$

где

$$k = -[\alpha_1 \operatorname{sh} r(1-\eta_1)\cos r_1(1-\eta_1) - \beta_1 \operatorname{ch} r(1-\eta_1)\sin r_1(1-\eta_1)]\, D_1,$$

$$l = [\beta_1 \operatorname{sh} r(1-\eta_1)\cos r_1(1-\eta_1) + \alpha_1 \operatorname{ch} r(1-\eta_1)\sin r_1(1-\eta_1)]\, D_1$$

$$k_1 = [\gamma_1 \operatorname{sh} s(1-\eta_1)\cos s_1(1-\eta_1) - \delta_1 \operatorname{ch} s(1-\eta_1)\sin s_1(1-\eta_1))]\, D_2,$$

$$l_1 = -[\delta_1 \operatorname{sh} s(1-\eta_1(\cos s_1(1-\eta_1) + \gamma_1 \operatorname{ch} s(1-\eta_1)\sin s_1(1-\eta_1)]\, D_2$$

причем

$$D_1 = \frac{2}{\operatorname{ch} 2r - \cos 2r_1}, \quad D_2 = \frac{2}{\operatorname{ch} 2s - \cos 2s_1},$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ определяются согласно (22).

Когда $W_1 = 0$, то значения постоянных $A, B, C$ и $D$ (26) определяются только в зависимости от $Q$, так как в формуле (22) необходимо положить $m_1 = 0$; когда $W_1 \neq 0$, то (26) дает также систему уравнений относительно $A, B, C$ и $D$.

**5.** Возьмем для примера стальной стержень,[1] длина которого $l = 50$ см площадь поперечного сечения $A = 1 \times 1$ см², $\frac{\gamma}{g} = 7{,}8$, $E = 2 \cdot 10^{12}$, $\xi = 5 \cdot 10^8$ (C. G. S.) и предположим, что со серединой стержня связан груз весом $W_1 = 1.5\, A\gamma l$ ($m_1 = 1.5$), причем в этой точке действует периодическая сила $Q_1 \sin kt$.

[1] K. Sezawa, l. c.

Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Оба конца стержня закреплены (условия II для $x = 0$ и $x = l$).

Без учета внутреннего затухания получим наименьшее значение $\beta_k$ соответствующее критической частоте для состояния резонанса (из соответствующего трансцендентного уравнения частоты), равным

$$\beta_k = 10,119.$$

Определим прогиб стержня в предположении, что частота периодической силы равна критической частоте.

В этом случае согласно (7)

$$\mu = \frac{k\xi}{E} = \frac{\beta_k \xi}{El^2}\sqrt{\frac{EIg}{A\gamma}} = \frac{10,119 \cdot 5 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{12} \cdot 50^2}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{12}}{12 \cdot 7,8}} = 0.14792.$$

Пренебрегая инерцией поворота, из (14) имеем

$$r = s_1 = 3.17027, \quad r_1 = s = 0.11643.$$

Значения величин входящих в (18) и (25) будут

$$\operatorname{sh}\frac{r}{2} = 2.33751, \quad \operatorname{ch}\frac{r}{2} = 2.54244, \quad \operatorname{sh} r = 11.8863, \quad \operatorname{ch} r = 11.9153,$$

$$\operatorname{sh}\frac{r_1}{2} = 0.058246, \quad \operatorname{ch}\frac{r_1}{2} = 1.00169, \quad \operatorname{sh} r_1 = 0.11669, \quad \operatorname{ch} r_1 = 1.00679.$$

Удовлетворяя условиям II для правого конца, получим следующую систему уравнений для определения постоянных (коэффициенты логарифмические).

$$\begin{aligned}
-1.31823\ A + 0.50394\ B - 1.20318\ C + 0.41479\ D &= -0.62385 f\\
0.50394\ A + 1.31823\ B + 0.41479\ C + 1.20318\ D &= \bar{1}.79753 f\\
-1.93146\ A + 1.21604\ B - 1.81689\ C + 1.09828\ D &= -1.40613 f\\
1.21604\ A + 1.93146\ B + 1.09828\ C + 1.81689\ D &= 0.58365 f
\end{aligned}$$

где

$$f = \frac{Ql^3}{2\beta^2 EI}.$$

Отсюда для постоянных $A$, $B$, $C$ и $D$ имеем значения

$$A = -0.33820 f, \quad B = -8.9426 f, \quad C = 0.80992 f, \quad D = 11.630 f.$$

Максимальная амплитуда $N$ вынужденных колебаний для $\beta = \beta_k$ будет

$$N = \sqrt{\varphi_1^2\left(\frac{1}{2}\right) + \psi_1^2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

где $\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$ согласно (25)

$$\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)=-7.2791\,f \quad \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=-0.2223\,f.$$

Следовательно

$$N=0.035564\,\frac{Ql^3}{EI}.$$

Отношение $\lambda$ этой амплитуды к отклонению $y_0$ от положения статистического равновесия под действием только силы $Q$ будет $\left(y_0=\frac{1}{192}\frac{Ql^3}{EI}\right)$

$$\lambda=\frac{N}{y_0}=6.828$$

б) Оба конца стержня оперты (условия I для $x=0$ и $x=l$). Значение $\beta$, соответствующее критической частоте для стержня без учета затухания при прежней нагрузке

$$\beta_k=4.9107.$$

Для этого значения $\beta_k$ имеем ($s_1=r$, $s=r_1$)

$$r=2.21365,\ r_1=0.039682,\ \mu=0.071782.$$

Система уравнений (26) будет (коэффициенты логарифмические)

$$1.65305\ A-\bar{1}.68566\ B+\bar{1}.15774\ C-1.08129\ D=1.12975\,f_1$$

$$1.68566\ A+1.65305\ B-1.08129\ C-\bar{1}.15774\ D=\bar{2}.42882\,f_1$$

$$\bar{1}.24471\ A+0.32854\ B-\bar{1}.74609\ C-\bar{2}.98096\ D=\bar{2}.96037\,f_1$$

$$0.32854\ A-\bar{1}.24471\ B+\bar{2}.98096\ C-\bar{1}.74609\ D=0.19986\,f$$

где

$$f_1=\frac{Ql^3}{1.5\,\beta_k^2\,EI}$$

коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$ будут

$$A=1.4727\,f_1,\ B=4.9422\,f_1,\ C=18.4409\,f_1,\ D=4.3967\,f_1$$

следовательно амплитуда

$$N=\sqrt{\varphi_1^2\left(\frac{1}{2}\right)+\psi_1^2\left(\frac{1}{2}\right)}=f_1\sqrt{1.9839^2+9.8282^2}=0.27722\,\frac{Ql^3}{EI}.$$

Коэффициент $\lambda$ будет $\left(y_0=\frac{1}{48}\frac{Ql^3}{EI}\right)$

$$\lambda=\frac{N}{y_0}=13.307.$$

Рассмотрим теперь случай, когда сосредоточенная масса отсутствует, а на стержень действует только периодическая сила $Q \sin kt$.

в) Для опертых концов без учета затухания для основного тона значение $\beta_k$ будет

$$\beta_k = \pi^2.$$

Для $\beta = \beta_k$ значения $r$ и $r_1$ будут

$$r = 0.9968\,\pi, \quad r_1 = 0.03572\,\pi.$$

Значения постоянных $A$, $B$, $C$ и $D$ после вычислений (50-сант. линейкой) согласно формул (26) получим равными

$$A = 0.110\,f, \quad B = -0.0015\,f, \quad C = 4.420\,f, \quad D = 0.233\,f \quad \left(f = \frac{Ql^3}{\pi^3 EI}\right).$$

Из (17′) имеем

$$\varphi = -1.950\,f, \quad \psi = -17.65\,f.$$

Амплитуда $N$ и коэффициент $\lambda$ будут

$$N = 17.76\,f, \quad \lambda = \frac{N}{y_0} = 6.95. \tag{27}$$

**6.** В случае действия только периодических сил, можно получить результат, указанный в 5 в) несколько быстрее, пользуясь методом акад. А. Н. Крылова решения задач о вынужденных колебаниях с помощью разложения в ряд по фундаментальным функциям.

В частности для последнего примера можно вычислить, что максимальная амплитуда будет при значении $\beta = 0.98\,\beta_k$ и отличается от (27) всего лишь на $1\%$.

Для случая стержня с закрепленными концами решение уравнения для чисто вынужденных колебаний (без учета инерции поворота) может быть записано в виде $\left(x_1 = \frac{l}{2}\right)$

$$Y = \frac{4Ql^3}{EI} \sum_i^{1,3,5\ldots} \frac{X_i\left(\frac{l}{2}\right) X_i(x)}{l^4 X_i''^2(0) \sqrt{1 - \left(\frac{k^2 l^4}{a^2 m_i^4}\right)^2 + \mu^2}} \sin(kt + \varepsilon i)$$

где

$$X_i = (\operatorname{sh} m_i - \sin m)\left(\operatorname{ch}\frac{m_i x}{l} - \cos\frac{m_i x}{l}\right) - (\operatorname{ch} m_i - \cos m_i)\left(\operatorname{sh}\frac{m_i x}{l} - \sin\frac{m_i x}{l}\right),$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon_i = -\frac{a^2 m_i^4 k\xi}{[a^2 m_i^4 - k^2 l^4]\,E}.$$

Для $\beta_k = m_1 = 4.730^2$ имеем для амплитуды $N$ и коэффицнента $\lambda$ значения

$$N = 00156 \frac{Ql^3}{EI}, \quad \lambda = 2.99.$$

Максимальное значение $N$ будет при $\beta \simeq 0.98\, \beta_k$ и отличается от указанного $\sim$ на $1\%$.

## A. FILIPPOV (A. PHILIPPOFF). ERZWUNGENE BIEGUNGSSCHWINGUNGEN VON STÄBEN MIT DÄMPFUNG

### ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden erzwungene Biegungsschwingungen von homogenen Stäben betrachtet.

Unter der Voraussetzung von K. Muto und K. Sezawa betreffs der Dämpfung, und in Anbetracht der Drehungsträgheit, bekommen wir die Differentialgleichung (1).

Die Lösung dieser Gleichung für den Fall, wenn auf den Stab, mit dessen Achse die Einzelmassen $\frac{W_1}{g}, \frac{W_2}{g} \ldots \frac{W_n}{g}$ verbunden sind, eine harmonische Last wirkt, kann mit Hilfe der Heaviside'schen Methode erlangt werden, mit Benutzung der Methode von A. Kryloff bei Übergang zu Einzelbelastungen.

Die Lözung der Gleichung (1) für Intervalle des Stabes zwischen Einzelmassen $\frac{W_k}{g}$ und $\frac{W_{k+1}}{g}$ ist aus (24) zu ersehen, wo $\varphi$ und $\psi$ für das linke gestützte Ende aus (17) bestimmt werden, für das eingespannte aus (25).

Die Konstanten werden laut den Bedingungen am rechten Ende, wie in § 4 gezeigt ist, bestimmt.

In § 5 werden die Resultate der Berechnung für einen Stahlstab mit einem Querschnitt $1 \times 1$ cm² und einer Länge von 50 cm gegeben, mit dessen Mitte eine Einzelmasse verbunden ist, welche anderthalb mal grösser als die Masse des Stabes ist.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1935
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

# КИНЕМАТИКА ДЕЛЬФИНА

В. В. ШУЛЕЙКИНА

*(Представлено академиком* С. И. Вавиловым)

Поднявшись на более высокую ступень эволюционной лестницы, по сравнению с рыбой, дельфин должен был приобрести и более совершенный движитель, механизм работы которого до настоящего времени оставался неизученным. Вот почему мне казалось чрезвычайно интересным попытаться сравнить этот механизмом с механизмом движителя рыбы, исследование которого опубликовано в этом же журнале.

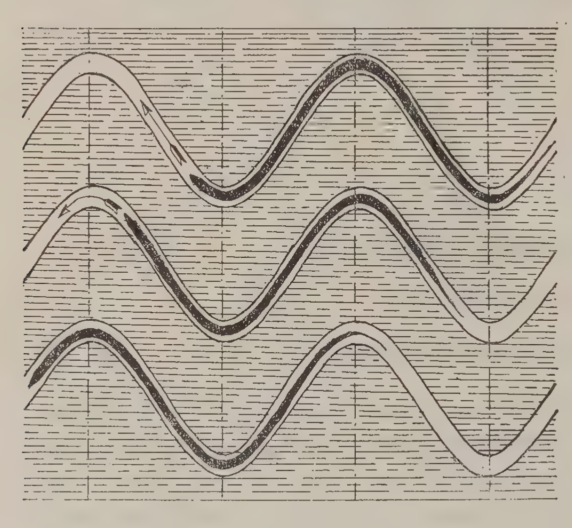
Детальное исследование движения рыбы,[1] проделанное в цитированной работе, приводит к заключению, что движущим механизмом у нее является все ее тело, по которому непрерывно бежит волна поперечных колебаний. Скорость этой волны, распространяющейся от головы ко хвосту, должна превышать скорость движения тела рыбы относительно водной среды, ибо отталкивание от последней достигается именно за счет разности скоростей.

Проще всего за кинематикой и динамикой подобной «твердой волны», движущейся в жидкой среде, можно проследить на примере тех рыб, которые обладают змеевидной формой тела и у которых поперечные колебания хвоста по амплитуде мало превосходят поперечные колебания головы. Для удобства здесь придется воспроизвести (на фиг. 1a и 1b) ту картину, к которой мне удалось притти в цитированной работе.

Фиг. 1a схематически изображает случай змеевидного движения в среде, не оказывающей движущемуся телу никакого лобового сопротивления и не дающего никакого трения на поверхности тела. В данном случае скорость распространения $c$ волны по телу рыбы может равняться скорости движения самого тела рыбы ($v$) относительно водной среды (разумеется, $c$ и $v$ направлены в противоположные стороны).

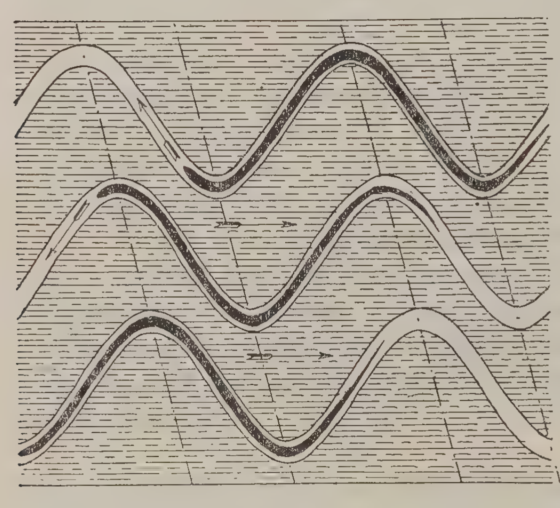
[1] В. В. Шулейкин. Внешняя и внутренняя динамика рыбы. Изв. Академии Наук СССР, № 8, 1934, стр. 1151 сл.

Легко убедиться, что здесь синусоидальная форма как бы застывает в пространстве и змеевидное тело рыбы свободно скользит внутри какого-то синусоидального канала, который можно вообразить в водной среде. Никаких возмущений в этой среде не должно возникать ни при каких величинах амплитуд поперечных колебаний.



Фиг. 1.

Совершенно очевидно, что подобный абстрактный случай резко отличается от случаев действительного движения, которые могут наблюдаться в природе, ибо в действительности всякое движущееся тело встречает в водной среде лобовое сопротивление, равно как и сопротивление, обусловленное поверхностным трением. Но тогда необходимо заключить, что для создания и поддержания движения, рыба должна отталкиваться от внешней водной среды, вызывая в ней какие-то возмущения и за счет них поучая импульсы, направленные вперед.



Фиг. 1b.

Фиг. 1b схематически показывает, каким образом может быть осуществлено змеевидное движение в реальной, сопротивляющейся среде. Как видим, здесь скорость $c$ распространения волны по телур ыбы должна превышать скорость поступательного движения ($v$), следовательно, «форма волны» должна двигаться назад со скоростью $c - v$, представляющей собою некоторую аналогию скорости «скольжения» в электродвигателях с вращающимся магнитным полем (фиг. 1b). Для того, чтобы судить об отталкивательной силе, которая при этом возникает, достаточно представить себе, что тело рыбы, принявшее форму синусоиды, внезапно сделалось абсолютно твердым и что такая «зафиксированная» форма как бы протаскивается назад со скоростью $c - v$. Сопротивление, которое

встретилось бы при таком воображаемом протаскивании, представляет собою ту силу, которая в действительности толкает рыбу вперед.

Итак, движущаяся рыба как бы скользит внутри некоторого воображаемого канала синусоидальной формы, а сам этот канал отступает со скоростью $c - v$ относительно водной среды, как это изображено на фиг. 1b.

Разумеется, для большинства рыб, форма которых сильно отличается от змеевидной, условия движения будут значительно сложнее, благодаря тому, что амплитуда поперечных колебаний хвостовой части будет значительно превышать амплитуду головной. В цитированной работе было показано, что в таком наиболее распространенном случае движение рыбы может быть выражено уравнением волны нарастающей (от головы к хвосту) по экспоненциальному закону, и что, исходя из этого уравнения, можно проследить за всеми элементами внешней и внутренней кинематики и динамики рыбы.

Совершенно естественно возникает вопрос: нельзя ли воспользоваться теми же методами для выяснения элементов кинематики дельфина. В предлагаемой работе я попытаюсь показать, что на вопрос этот следует ответить утвердительно, хотя с самого же начала приходится признаться, что в настоящее время выйти за пределы кинематики и охватить динамику у дельфина еще нельзя.

## § 1. Основные черты движителя у дельфина

Как известно, скорость дельфина может достигать около 10 м в секунду: дельфины начинают отставать от кораблей только тогда, когда скорость последних превышает примерно 20 узлов.

Перемещаясь в водной среде с такой громадной скоростью, дельфин работает своим движителем со столь большой частотой, что, наблюдая его сквозь воду с корабля, нельзя заметить никаких видимых деформаций тела. Однако, ключ к разгадке механизма его движения может быть найден при рассмотрении моментальной фотографии, которая была сделана с мостика корабля одним итальянским моряком, приславшим снимок в журнал «Illustration» за 1910 г.

Этот интереснейший снимок, воспроизведенный на фиг. 2, был в дальнейшем перепечатан в ряде работ и послужил к совершенно неправильным толкованиям кинематики дельфина. Так, основываясь на нем, Houssay[1] предполагал, что дельфин движется благодаря непрерывным колебаниям (в вертикальном направлении) одного лишь хвостового плавника и что винтообразные струи, вышедшие на фотографии, вызываются асимметрией черепа. По мнению этого исследователя, асимметричная форма черепа заставляет струи воды закручиваться вокруг

[1] F. Houssay. Forme, puissance et stabilité des poissons, Paris, 1912.

тела дельфина по винтовой линии, следовательно, по его теории, винтовые струи являлись мало существенным элементом вторичного порядка.

На иной, но тоже неправильной позиции стоит Н. Л. Чугунов, много наблюдавший дельфина на промыслах и пришедший к выводу, что вдоль по телу животного пробегает «мышечный бугор», в форме винтообразного жгута. Н. Л. Чугунов, любезно указавший мне где можно видеть первоисточник фиг. 2, предполагал, что итальянская фотография запечатлела именно мгновенные положения этих бугров на корпусах дельфинов. Однако, такое предположение не может соответствовать действительности, во-первых, потому, что сквозь толстый слой жира, облекающий тело дельфина, не проступили бы очертания не только мускульного бугра, но даже отдельной кости, а во-вторых, потому, что уж во всяком случае никакой мускульный «бугор» не мог бы возникнуть на самом переднем участке головы (где винтовые завитки ясно видны на фиг. 2).



Фиг. 2.

Между тем, легко можно показать, что рис. 2 прекрасно расшифровывается на основе волновой теории движения дельфина, напоминающей волновую теорию движения рыбы, развитую мною в цитированной работе.

В самом деле, совершенно очевидны следующие простые заключения: a) Надо согласиться с Houssay в том отношении, что извилистые очертания тела дельфинов на фиг. 2 вызваны оптической иллюзией и что в свою очередь эта оптическая иллюзия обязана своим возникновением каким-то винтовым струям, образующимся вокруг тела дельфина. b) Но только в отличие от гипотезы этого исследователя надо признать, что винтовые струи вызываются самыми существенными и самыми характерными особенностями работы движителя у дельфина. c) Пропеллирующее действие этого движителя у дельфина должно быть во всяком случае не хуже, а вероятно — значительно лучше, чем у рыбы, а потому весьма вероятно наличие поперечных волн, бегущих вдоль по телу дельфина от головы ко хвосту и отталкивающихся от водной среды по схеме, о которой говорилось в начале этой статьи.

Сопоставляя пункты a, b и c приходится притти к выводу, что тело дельфина как бы ввинчивается в воду и что такое движение достигается благодаря существованию двух систем поперечных волн, бегущих от головы ко хвосту: одна из них совершенно подобна той, которая наблюдается у рыб — здесь поперечные колебания совершаются в горизонтальной плоскости, по закону

$$y = a_1 \cdot e^{\beta_1 x} \sin \gamma \left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{1}$$

где $y$ обозначает отклонение некоторого элемента тела от начальной оси (совпадающей с направлением движения); $a_1$ амплитуда поперечных колебаний переднего конца головы; $e$ — основание натуральной системы логарифмов; $x$ — расстояние от переднего конца головы, отсчитываемое вдоль начальной оси тела (оси абсцисс); $\beta_1$ — фактор, характеризующий быстроту нарастания амплитуды поперечных колебаний, по мере продвижения вдоль тела, от головы ко хвосту $\gamma$ — частное от деления $2\pi$ на период колебаний $T$; $t$ — текущее время; $c$ — скорость распространения волны.

Другая система волн соответствует поперечным же колебаниям тела, но только происходящим в вертикальном направлении. Эти колебания можно выразить уравнением, аналогичным уравнению (1).

Именно:

$$z = a_2 \cdot e^{\beta_2 x} \cos \gamma \left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{2}$$

Все обозначения здесь прежние. Индексы под буквами поставлены для общности — в предположении, что амплитуды поперечных колебаний данной точки тела в горизонтальном направлении не равны амплитудам вертикальных колебаний тех же точек.

Как известно, совокупность уравнений (1) и (2) свидетельствует о том, что благодаря сложению колебаний в двух взаимноперпендикулярных плоскостях исследуемая точка движется по эллипсу с полуосями:

$$\mathfrak{A}_1 = a_1 \cdot e^{\beta_1 x} \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}_2 = a_2 \cdot e^{\beta_2 x} \tag{3}$$

В частном случае, если $a_1 = a_2 = a$ и $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, эллипс превращается в круг с радиусом:

$$\mathfrak{A} = a \cdot e^{\beta x} \tag{4}$$

Итак, хорошие условия пропеллирования могут быть достигнуты при условии, что *по телу дельфина бежит нарастающая (от головы ко хвосту) волна, поляризованная по эллипсу, или по кругу.*

Для подтверждения этой гипотезы трудно пользоваться методом киносъемки сквозь слой воды, ибо струи, возникающие вокруг тела дельфина, резко

искажают картину (как видно на фиг. 2), делая ее непригодной для основных измерений. Поэтому был выбран другой путь экспериментальной проверки.

Дельфин, пойманный посредством аломана, помещался на специально построенном станке, с таким расчетом, чтобы головная половина его тела проходила сквозь отверстие в толстой вертикально поставленной доске и покоилась на полке, к которой она крепилась посредством пеньковых концов. Напротив, хвостовая часть тела выступала из отверстия в доске вперед и можно было удобно фотографировать ее посредством небольшого киносъемочного аппарата («Кинамо» Цейсса, с пружинным заводным механизмом для автоматической съемки).



Фиг. 3.

Дельфин раздражался посредством электрического тока (электроды вводились ему в рот; разность потенциалов была 110 вольт), или посредством искусственной задержки дыхания (дыхательное отверстие на некоторое время закрывалось рукой).

И в том и в другом случае дельфин должен был инстинктивно проделывать те именно движения, которые он совершает, спасаясь от преследования. Только, разумеется, и частота и амплитуды колебаний в воздухе не могли быть теми же, как в воде.

С негативной киноленты были сделаны увеличения всех кадров до размера $9 \times 12$, для того, чтобы можно было удобнее проследить за всеми характерными особенностями движения хвостовой части тела дельфина. Образец одного из кадров воспроизведен на фиг. 3.

Киносъемка подтвердила только-что изложенную мою гипотезу о характере движения тела дельфина, причем выяснилось, что каждая точка тела дельфина описывает окружность с радиусом, определяемым по уравнению (3).

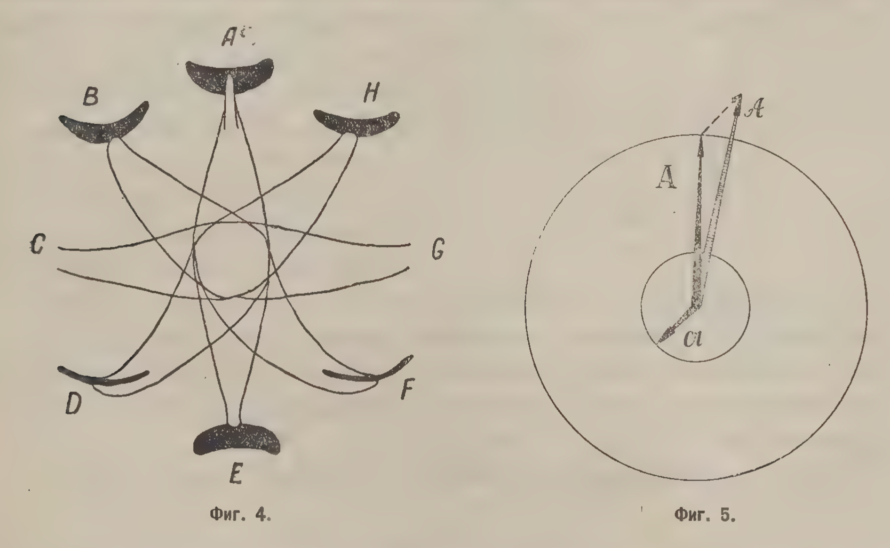
Для суждения о геометрических элементах орбиты, определялось перспективное искажение каждого отдельного снимка и затем полученная картина движения была схематически изображена на сводной диаграмме фиг. 4. Ниже будет указано, почему в положениях $C$ и $G$ отсутствует изображение хвостового плавника.

Необходимо отметить, что диаграмма фиг. 4, строго говоря, изображает движение хвостовой части дельфина относительно того сечения его тела, которое было закреплено на станке. Допустим, что при движении в водной среде каждая точка этого сечения в свою очередь тоже двигалась бы по некоторой окружности

радиуса $\mathfrak{A}$ и что в действительности каждая точка хвостового плавника описывала бы при этом окружность радиуса А. В каждый момент времени, радиус-вектор $\mathfrak{A}$ опережает радиус-вектор А на некоторый угол $\psi$, величина которого зависит от расстояния $(\lambda - x)$ между рассматриваемым сечением и концом хвостового плавника ($\lambda$ — длина волны). Именно легко показать, что

$$\psi = \gamma\left(\frac{\lambda - x}{c}\right) = 2\pi\frac{\lambda - x}{cT} \tag{5}$$

При опытах на станке, промежуточное сечение было закреплено. В переводе на язык векторов это значит, что ко всем векторам, выражающим движение различных точек тела дельфина, был прибавлен геометрически вектор, равный по




Фиг. 4. Фиг. 5.

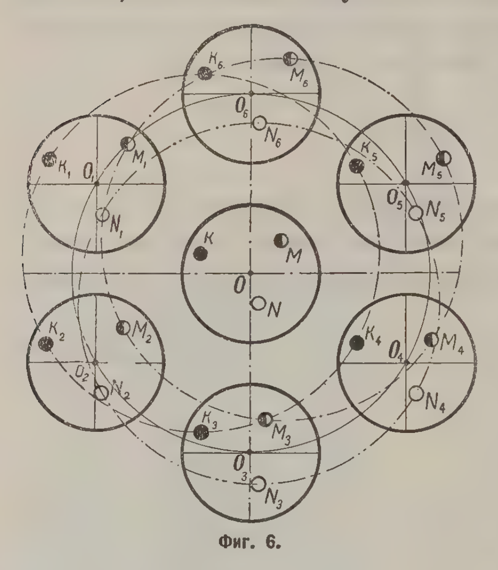
модулю вектору $\mathfrak{A}$ и противоположно направленный. Как и следовало ожидать, при таком суммировании векторов для промежуточного (закрепленного) сечения получилось:

$$\mathfrak{A} + (-\mathfrak{A}) = 0,$$

а для конца хвостового плавника вместо вектора А возник вектор $\mathcal{A}$, равный геометрической сумме А и $(-\mathfrak{A})$. Этот-то вектор $\mathcal{A}$, изображенный на схеме фиг. 5, определяет собою радиус орбиты хвоста, фигурирующий на сводной «киносхеме» фиг. 4, и ту разность фаз, которая должна существовать между действительным движением в воде и «суммарным» движением на станке.

Упомянутые поправки показывают, что киносъемка дельфина, укрепленного на станке, дает совершенно отчетливую картину кругового движения каждой точки тела дельфина. Необходимо добавить еще, что такое круговое движение совершается здесь без вращения отдельных точек вокруг центра сечения самого

тела, подобно тому как совершается движение земного шара около общего центра тяжести системы «земля — луна». Чтобы ясно представить себе такое движение, достаточно взглянуть на фиг. 6, на которой буква O обозначает начальное положение оси тела, а буквы $O_1$, $O_2$ и т. д. последовательные положения, которые занимает центр сечения в различные моменты времени. Буквы K, M и N с различными индексами обозначают положения одних и тех же точек сечения в те же моменты времени. Как видим, каждая из этих точек описывает в пространстве окружность одного и того же радиуса $\mathfrak{A}$. Для наглядности все три окружности нанесены различными пунктирными линиями. Легко видеть, что стороны треугольника KMN перемещаются, оставаясь параллельными самим себе, а это — характеризует движение без вращения. Нетрудно видеть также, что движение каждой точки здесь может быть выражено уравнениями, отличающимися от (1) и (2) только тем, что в действительности каждая точка тела дельфина описывает не эллиптическую, а круговую орбиту, радиус которой ($\mathfrak{A}$) определяется, в свою очередь, уравнением (4).



Фиг. 6.

Итак, движение каждой точки тела дельфина выражается уравнениями:

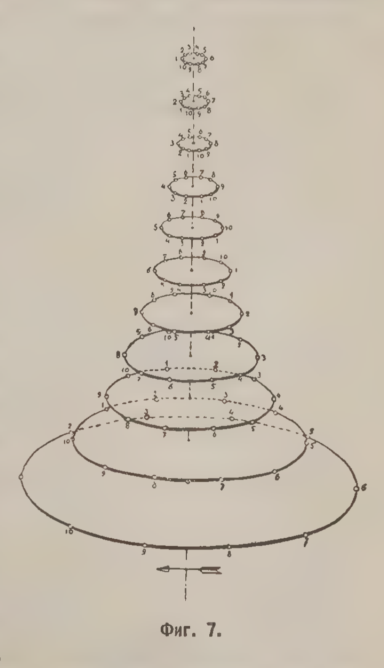
$$y = a \cdot e^{\beta x} \cdot \sin \gamma \left( t - \frac{x}{c} \right) \tag{6}$$

$$z = a \cdot e^{\beta x} \cdot \cos \gamma \left( t - \frac{x}{c} \right) \tag{7}$$

Они определяют собою нарастающую волну, поляризованную по кругу.

Для того, чтобы представить себе периодические изменения формы тела, по которому распространяется такая волна, проще всего поступить следующим образом: построим в перспективе совокупность орбит, по которым вращаются точки, лежащие на осевой линии тела. Это будут окружности с центрами, расположенными на одной прямой, и с радиусами, возрастающими по экспоненциальному закону от головы ко хвосту. Величина этих радиусов по сравнению с длиной тела зависит от амплитуды поперечных колебаний; на фиг. 7 она умышленно выбрана побольше для отчетливости и наглядности чертежа.

Разобьем каждую из окружностей на десять частей и проставим цифры при точках, нанесенных на самую малую из них — головную. Допустим, что при колебаниях головного конца тела, происходящих по уравнениям (6) и (7), этот конец оказывается последовательно в точках «1», «2», «3» и т. д. в течение одного периода. Тогда на второй орбите, отстающей от первой на 0.1 длины тела, номера точек несколько сместятся, повернувшись вокруг оси XX на 0.1 окружности (в предположении, что на противоположном конце тела поворот происходит на полную окружность т. е., другими словами, что «длина волны» равняется длине тела: $\lambda = L$). Как совершенно очевидно, «поворот» точек с соответствующими номерами происходит потому, что колебания участка тела, отстоящего на 0.1 всей длины от переднего конца, запаздывают по фазе на $\frac{2\pi}{10}$ относительно колебаний этого конца.



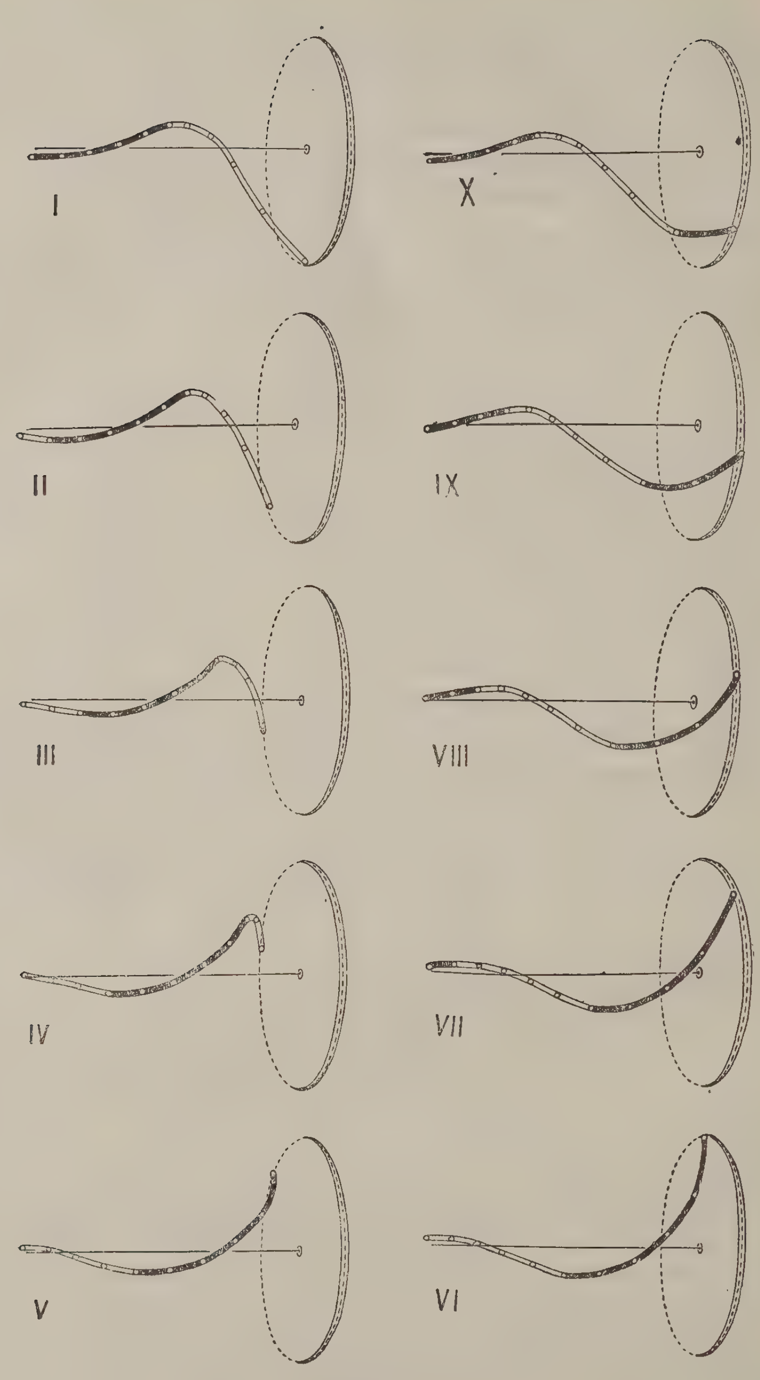
Фиг. 7.

По той же причине точки, обладающие соответствующими номерами на третьей орбите, повернутся еще на 0.1 полной окружности вокруг оси, точки четвертой орбиты — еще на 0.1 и т. д. до конца хвостового плавника, который, по принятому условию, будет находиться всегда в одной фазе с передним концом тела, а стало быть все соответствующие точки, в которых он будет находиться за время одного оборота, окажутся в тех же положениях, как точки первой орбиты.

Теперь остается только провести плавные кривые через все точки «1», через все точки «2» и т. д. до точек «10». Полученные кривые дадут перспективное изображение осевой линии тела дельфина, деформирующейся в течение одного периода. Для наглядности, все эти линии изображены отдельно на десяти эскизах фиг. 8. Чтобы не затуманивать картины, на этих эскизах больше не нанесены орбиты, а оставлены только руководящие точки, по которым были проведены кривые.

Как видим, тело дельфина «ввинчивается» в воду, несмотря на, что каждое сечение движется вокруг оси XX без вращения (в согласии с фиг. 6).

Кинематограммы, так же как и фиг. 2, показывают, что этот винт обладает левой «нарезкой», другими словами, вращение элементов тела происходит против часовой стрелки (если смотреть по направлению хода дельфина). Для облегчения пространственного представления, на эскизах фиг. 8 тушью залиты те участки винтовой линии, которые лежат между наблюдателем и плоскостью чертежа. Белыми оставлены участки, находящиеся позади плоскости чертежа.

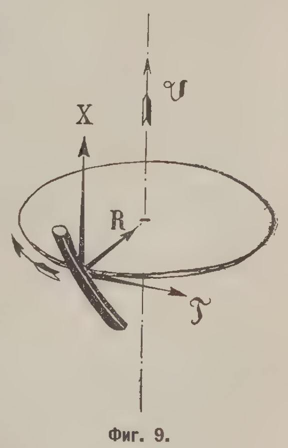



Фиг. 8.

## § 2. Некоторые особенности винтового движения

Вглядываясь в схемы, изображенные на фиг. 8, легко притти к заключению, что винтовое движение дельфина неминуемо должно повести к возникновению не одних только полезных, пропульсивных сил, но и вредных сил, которые поглотят часть затрачиваемой энергии и вызовут добавочные, сложные движения.

В самом деле, при вращении элементов тела вокруг оси XX, будут возникать три составляющих силы: (одна из них ($X$) будет направлена вдоль оси XX и будет служить основной движущей силой (полезной); вторая ($R$) направится по радиусу и послужит к возникновению рысканья дельфина (попеременного отклонения его в разные стороны от курса); наконец, третья компонента будет перпендикулярна к плоскости, проходящей через радиус-вектор и через ось XX. Эта третья сила, обозначенная на фиг. 9 буквой $T$, даст некоторую слагающую вращающего момента, который будет стремиться повернуть тело дельфина вокруг собственной продольной оси.



Фиг. 9.

Легко показать, что величина всех трех сил зависит, во-первых, от величины разности скоростей $c - v$, во-вторых, — от фактора $\beta$, характеризующего возрастание амплитуды от головы к хвосту, и, наконец, в-третьих, от абсолютной величины самих амплитуд (другими словами, от абсолютных величин радиусов $\mathfrak{A}$).

Если фактор $\beta$ равняется нулю, т. е. если все элементы тела вращаются по окружностям одного и того же радиуса, то анализ движения оказывается самым простым. Он напоминает анализ змеевидного движения, рассмотренного в работе о рыбе.[1] В самом деле, в данном случае все три силы могут оказаться равными нулю по тем же причинам, по каким не возникало никаких сил при движении, изображенном на фиг. 1а: для этого необходимо только, чтобы отсутствовало лобовое сопротивление (равно как и сопротивление трения) и чтобы скорость распространения волны $c$ была равна и противоположно направлена скорости поступательного движения $v$.

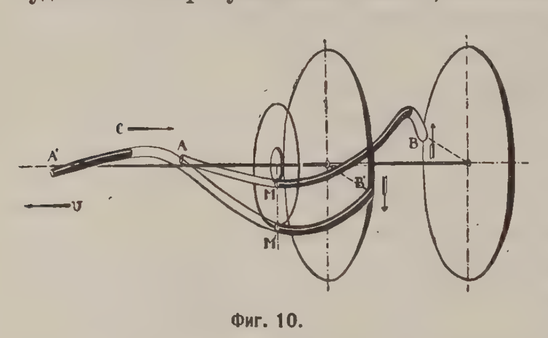
На фиг. 1а змеевидная рыба как бы проскальзывала без трения внутри некоторого воображаемого канала синусоидальной формы, мысленно выделенного в водной среде. Теперь, в случае пространственного, а не плоского движения, тело исследуемого животного будет так же легко проскальзывать внутри винтообразного канала, как бы застывшего неподвижно в водной среде.

В природе, при движении змеевидной рыбы, неминуемо возникает как лобовое сопротивление, так и трение на поверхности тела. Поэтому, как было упо-

[1] В. Шулейкин, цитированная работа.

мянуто во введении, должна существовать какая-то пропульсионная сила, преодолевающая все сопротивления движению. Эта пропульсионная сила, согласно схеме фиг. 1b, возникала благодаря «скольжению» самого синусоидального «канала», который как бы «отступал» в водной среде со скоростью, равной $c - v$ (чем больше силы, сопротивляющиеся поступательному движению, тем больше должна была быть эта разность скоростей). Теперь, в пространственном случае, «скользить» будет сам «винтообразный канал»: он будет отступать назад со скоростью $c - v$, величина которой обусловлена величиной сопротивлений поступательному движению.

Легко убедиться, что в данном конкретном случае наибольшее значение будет иметь пропульсивная сила X; что касается силы $T$, то она будет тем меньше, чем меньше разность скоростей $c - v$; сила же $R$ вообще будет равна нулю. Ближе всего к рассмотренному случаю подходит движение такого рода организмов, как спирохэты.



Фиг. 10.

Допустим теперь, что фактор β не равен нулю и рассмотрим два подкласса, относящихся к этому, наиболее важному для нас классу движения. Именно, a) подкласс, соответствующий $c = v$, и b) подкласс, соответствующий $c > v$.

Если $c = v$, то, как и прежде, фаза должна неподвижно застыть в пространстве, но только, в отличие от ранее рассмотренного случая, радиус-вектор $\mathfrak{A}$, при прохождении волны сквозь данную точку внешней среды, будет нарастать, как изображено на фиг. 10.

Здесь, на фиг. 10 представлены два положения «твердой поляризованной волны» в два момента времени, разделенных промежутком времени, равным половине периода. Как уже упоминалось, предполагается, что $\beta = 0$ и $c = v$.

Как видим, при перемещении тела «дельфина» из положения AB в положение A'B', фазовая волна успела переместиться вдоль тела по направлению от головы ко хвосту на то же самое расстояние, на которое продвинулось относительно воды само тело дельфина. В результате оказалось, что некоторая произвольная секущая плоскость, перпендикулярная оси XX, пересекает и старую и новую осевую линию тела в точках M и M', находящихся в одной и той же фазе.

Но если это так, то, следовательно при прохождении «волны» сквозь ту же секущую вертикальную плоскость, все положения точек M' и M'' и т. д. окажутся на продолжении одного и того же радиуса-вектора. Никакого вращения точки M

в секущей плоскости не будет, поэтому реактивные силы, которые могли бы создать вращающий момент, будут отсутствовать.

В то же время фиг. 10 показывает, что, по мере перемещения твердой волны сквозь секущую плоскость, длина радиуса вращения непрерывно возрастает. Следовательно, при таком движении должна возникать реактивная сила, препятствующая нарастанию радиуса и, как не трудно видеть, направленная по радиусу. Это и будет та компонента $R$, о которой говорилось выше.

Второй «подкласс», который именно соответствует реальному движению дельфина, характеризуется условиями:

$$\beta > 0; \quad c > v.$$

Здесь картина будет сложнее той, которая изображена на фиг. 10: точка M будет смещена относительно точки M в тангенциальном направлении, благодаря тому, что форма волны теперь будет отступать назад (грубо говоря, — по примеру фиг. 1b).

Следовательно, в реальном случае, на тело дельфина все же будет действовать некоторый момент, стремящийся повернуть его вдоль его собственной продольной оси. Но момент этот будет тем меньше, чем меньше будет «скольжение» формы в водной среде, т. е., другими словами, чем меньше будет разность скоростей $(c - v)$.

Если мы вспомним фиг. 4, изображавшую движение хвостовой части тела дельфина, то можем притти к выводу, что не все положения хвоста, нанесенные на схему, равнозначущи в отношении тангенциальных импульсов: во всех этих положениях хвост — и главным образом хвостовой пловник — создает далеко не одинаковый вращающий момент. В данном отношении менее всего активны моменты, обозначенные на фиг. 4 буквами $A$ и $E$, где движение происходит вдоль плоскости хвостового пловника. Напротив, моменты $C$ и $G$ на той же фигуре дали бы наибольшую активность, если бы хвостовой пловник попрежнему оставался твердым и плоским.

В действительности, как видим на фиг. 4, в этих фазах очертания хвостового пловника на схеме не нанесены. Это — потому, что ни на одном из снятых кинокадров не вышел пловник в такой фазе: всюду получались тряхнутые, размытые очертания, которые, повидимому, объяснялись расслаблением хвостовых мышц и пассивным (колеблющимся, подобно флагу) движением пловника.

На фиг. 11 воспроизведен один из таких кадров, на котором нельзя обнаружить ни следа хвостового пловника, хорошо вышедшего хотя бы на фиг. 3.

Итак, дельфин обладает механизмом, позволяющим выключать хвостовой пловник в тех фазах, когда работа его создает наибольший вредный вращающий момент. Механизм этот заставляет вспомнить аналогичное приспособление, существующее у весьма быстроходных рыб (напр., у макрели), где оно тоже выводит

из работы хвостовой пловник во вредных положениях; только там в этих вредных положениях возникало не вращение вокруг продольной оси, как у дельфина а интенсивное вихреобразование, связанное с рысканьем рыбы.[1]

Но как бы хорошо ни работал выключающий механизм, он не может полностью уничтожить вращающего момента, ибо во всех фазах, изображенных на фиг. 4, все же существует совершенно определенная его составляющая. Но тогда, каким же образом дельфин не поворачивается непрерывно вокруг своей продольной оси? Ведь, хотя бы в случае движения торпеды, подобное поворачивание предотвращается только лишь путем устройства двух винтов, вращающихся в противоположных направлениях. У дельфина имеется только единственный «винт», следовательно, для компенсации вредного вращающего момента у него должно быть какое-то иное приспособление.



Фиг. 11.

По мнению Houssay[2] компенсация возникает благодаря существованию спинного пловника, всегда сильно развитого у китовых. Но совершенно очевидно, само по себе существование этого пловника не гарантирует еще никакого компенсирующего обратного момента; оно может только уменьшить угловую скорость вращения, вызываемого вредным моментом.

Для компенсации же необходимо, чтобы пловник не только существовал, но и был поставлен асимметрично, чтобы он лежал не в плоскости, проходящей через продольную ось тела, а на некоторой винтовой поверхности (и притом — с «левой нарезкой»).

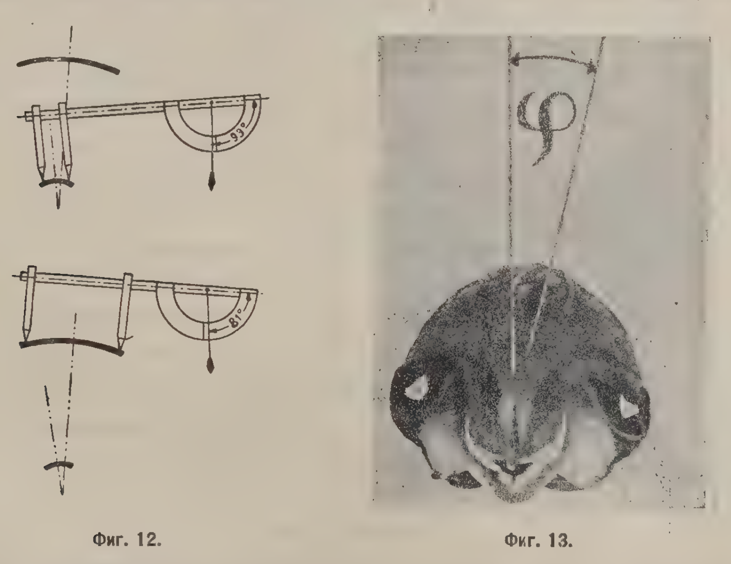
Ту же роль может играть и хвостовой пловник, при условии, что он тоже деформирован по некоторой винтовой поверхности (и тоже с левой нарезкой).

Но замечательнее всего, что для компенсации вредного вращающего момента, несомненно, служит та асимметрия черепа дельфина, которая давно была подмечена исследователями у всех зубастых китов и которую Houssay считал причиной возникновения винтовых струй вокруг тела дельфина. Как видим, в действительности причину и следствие надо поменять местами: назначение асимметрии черепа в том, чтобы создавать вращающий момент, обратный основному, вызванному винтообразным движением тела.

[1] В. Шулейкин, цитированная работа.
[2] F. Houssay, l. c.

### § 3. Некоторые количественные характеристики

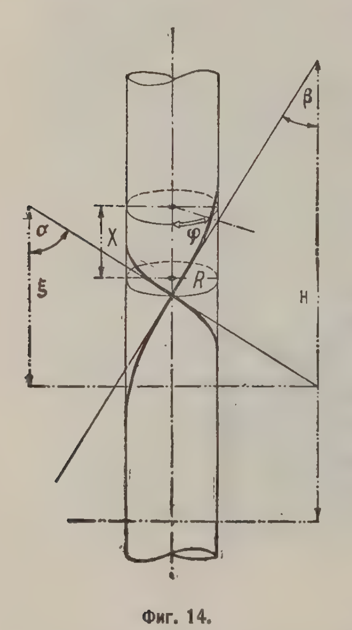
В предыдущем разделе указывалось, что для компенсации вредного вращающего момента у дельфина служит асимметрия головы, обусловленная асимметрией черепа. В настоящее время, на Черноморской гидрофизической станции ведется (В. С. Лукьяновой) систематическое исследование этой асимметрии, причем, в конечном счете, должна быть дана количественная характеристика лобовой части, рассекающей воду при движении дельфина. Прежде всего, пришлось начать с количественного исследования асимметрии самого черепа, лишенного жировых мускульных и кожных покровов. Для измерений был построен несложный прибор, схема которого изображена на фиг. 12. Это — своего рода циркуль, ножки




Фиг. 12. Фиг. 13.

которого могут раздвигаться так же, как у штангенциркуля и к линейке которого прикреплен транспортир с отвесом. Исследуемый череп кладется на какую-либо подставку так, чтобы он не мог сдвинуться во време работы, причем совершенно безразлично, как будет он наклонен относительно горизонтальной плоскости. Ножки циркуля ставят всякий раз на две «парные» соответствующие точки черепа и замечают, на каком делении устанавливается при этом нить отвеса. Так, на фиг. 12 одно из положений дает угол 93°, а второе положение — 81°. Нетрудно видеть, что линия второго сечения оказывается, следовательно, повернутой на 93°—81° = 12°. Измерения В. С. Лукьяновой показали, что у дельфина-белобочки (*Delphinus delphis*) на протяжении от средины челюсти до дыхательного отверстия линия симметрии оказывается сдвинутой на угол до 19°. Для наглядности, на фиг. 13 приведен снимок черепа, на котором отмечен этот угол (φ) сдвига.

На первый взгляд при рассматривании фиг. 12 кажется странным, почему сдвиг линии симметрии происходит в направлении по часовой стрелке, между тем как выше неоднократно упоминалось, что для компенсации вредного момента череп должен обладать левой «резьбой». Однако, легко убедиться в том, что никакого противоречия здесь не возникает. В самом деле, ведь если мы проведем на поверхности черепа линию, которая всюду будет делить пополам расстояние между каждыми двумя симметричными точками (например, точками $A_1$ и $A_2$, а также — между точками $B_1$ и $B_2$ на фиг. 12), то линия эта будет везде удовлетворять одному непременному условию: вертикальная плоскость, проведенная через какой-либо бесконечно-малый ее отрезок, будет перпендикулярна к элементу поверхности черепа в соответствующей точке (разумеется, о вертикальной плоскости здесь говорится в предположении, что тело дельфина расположено в горизонтальной, спинным плавником кверху). Взаимное расположение этой «искривленной оси симметрии« и винтовой поверхности, на которой располагаются границы черепа, схематически представлено на фиг. 14.



Фиг. 14.

Здесь линия с шагом ξ характеризует тот «винт», по которому закручены передние кости черепа. Другая же винтовая линия с шагом $H$ изображает «осевую линию». На основании изложенного, обе винтовые линии пересекаются под прямым углом.

Развернем в плоскости ту цилиндрическую поверхность, по которой проходят обе винтовые линии схемы. Тогда эти линии превратятся в две прямые, идущие под углом $\alpha$ и под углом $\beta$ к продольной оси. Из известных простых геометрических соотношений между шагом каждой из линий, радиусом ($r$) цилиндрической поверхности и углами $\alpha$ и $\beta$, легко найти:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\pi}{\xi}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{2\pi r}{H} \tag{8}$$

Но условие ортогональности обеих линий требует, чтобы было:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1 \qquad (9($$

Следовательно,

$$H = \frac{4\pi^2 r^2}{\xi} \tag{10}$$

Допустим, что при перемещении на расстояние $X$ вдоль тела, линия симметрии сдвигается на угол $\varphi$ (в радианах), (см. схему фиг. 11). Тогда как легко убедиться по фиг. 14, между $\varphi$ и $X$ должна существовать простая связь:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{x}{H} \tag{11}$$

Отсюда, на основании (10):

$$\varphi = \frac{x \cdot \xi}{2\pi r^2} \tag{12}$$

или, другими словами:

$$\xi = 2\pi r^2 \left(\frac{\varphi}{x}\right) \tag{13}$$

На практике удобнее выражать $\varphi$ не в радианах, а в градусах. Поэтому, подставим в (13) выражение:

$$\varphi = \varphi^0 \frac{\pi}{180}$$

Тогда окажется:

$$\xi = \frac{2\pi^2}{180} \cdot r^2 \left(\frac{\varphi^0}{x}\right)$$

или, после подстановки чисел:

$$\xi = 0.11 \cdot r^2 \left(\frac{\varphi^0}{x}\right) \tag{14}$$

Итак, шаг винта, по которому «закручены» кости черепа, можно определить по формуле (14), измеряя описанным способом угол закручивания «осевой линии». Частное от деления этого угла на расстояние (вдоль тела) между соответствующими сечениями $\left(\frac{\varphi^0}{x}\right)$ можно назвать приведенным закручиванием черепа. По измерениям В. С. Лукьяновой, его можно в среднем полагать равным 1.3° на сантиметр. Значительно менее надежны числовые значения радиуса $r$, ибо это расстояние от соответствующего элемента черепа до оси тела дельфина. Однако, без большой погрешности, можно в среднем считать для края лобной кости над дыхательным отверстием $r = 8$ см.

Подстановка этих числовых данных в формулу (14) приводит к величине шага винта порядка одного метра, т. е. того же порядка, как сама длина тела дельфина. Но ведь таким же шагом обладает и та винтовая линия, по которой изгибается хребет дельфина во время его движения (в предположении, что вдоль тела укладывается как-раз одна длина волны $\lambda$). Направление нарезки также совпадает в обоих случаях (легко видеть, что нарезка на фиг. 13 — левая и, очевидно, именно потому, что «осевая линия» закручивается вправо).

Как видим, простые промеры черепа дельфина приводят к некоторым любопытным элементам, характеризующим связь между кинематикой дельфина и его

анатомией. Назначение асимметрии черепа дельфина и других зубастых китов перестало быть загадочным.

Еще более простые измерения, проделанные непосредственно над фотографией итальянского моряка (фиг. 2) позволяют, — правда, очень грубо — определить еще несколько элементов кинематики дельфина. В самом деле, не рискуя сделать большую ошибку, можно принять длину тела дельфина равной одному метру. Тогда, при таком масштабе фотографии, окажется, что длина волн, бегущих по поверхности воды косыми рядами над дельфином, равна 14 см.

Пользуясь известным соотношением между периодом поверхностной волны и ее длиной, легко показать, что период 14-сантиметровых волн должен равняться, примерно,

$$T = 0.3 \text{ сек.}$$

Но ведь таков же должен быть, очевидно, и период твердой волны, бегущей по телу дельфину, — другими словами, период оборота хвоста вокруг продольной оси. С другой стороны, есть основания полагать, что длина этой твердой волны совпадает с длиной тела, т. е. в данном случае ее можно принять равной 100 см. Исходя из этой цифры и вспоминая, чему равен период $T$, легко убедиться, что скорость движения твердой волны по телу дельфина должна быть около

$$c = 330 \text{ см/сек.}$$

Порядок скорости поступательного движения самого тела в воде ($v$) можно также попытаться определить по фиг. 2, замечая, чему равен угол между направлением движения и направлением косых рядов волн.

В самом деле, перекос этих волн вызван сложением двух движений «волнового бугра» (по схеме фиг. 8): вращения его вокруг продольной оси с линейной скоростью $\frac{2\pi\mathfrak{A}}{T}$ и отступания его в воде назад, со скоростью $c - v$. Нетрудно видеть, что угол ($\gamma$) между гребнями волн и направлением движения дельфина должен удовлетворять условию:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\pi\mathfrak{A}}{(c - v)\,T}. \tag{15}$$

Исходя из пропорций фиг. 2 и принимая во внимание найденную выше величину периода $T$, можно показать, что приблизительно

$$c - v = 100 \text{ см/сек,}$$

откуда:

$$v = 230 \text{ см/сек.}$$

Но тогда, следовательно, отношение скорости твердой волны к скорости поступательного движения дельфина будет:

$$\frac{c}{v} = 1.43$$

Любопытно сравнить найденную величину $\left(\frac{c}{v}\right)$ с теми, которые были мною получены для различных рыб.[1] Именно, $\frac{c}{v}$ для акулы оказалось равным 1.9, для макрели 1.81 и даже для угря (с наиболее совершенными кинематическими данными для движителя) было $\frac{c}{v} = 1.55$. Как видим, поднявшись на более высокую ступень эволюционной лестницы, дельфин приобрел и более совершенный движитель (отношение $\frac{c}{v}$ представляет собою хорошую кинематическую характеристику). К сожалению, в настоящее время трудно надеяться даже на самое примитивное освещение динамики дельфина (хотя бы по схеме, намеченной в цитированной работе в области динамики рыбы) — слишком велики поперечные размеры его тела по сравнению с амплитудами поперечных колебаний. Однако, можно найти еще одну характеристическую величину, стоящую на грани кинематики и динамики: величину, с которой связана полезная работа дельфина за один период $T$. Эта величина — приведенный шаг дельфина (не смешивать с шагом винтовой линии, о котором говорилось выше).

Понятие о приведенном шаге было мною введено в работе по динамике рыб: такое название было там дано величине, равной отношению пути рыбы за один период к длине ее тела. Другими словами, приведенным шагом была названа величина:

$$\frac{vT}{L}$$

Вспоминая, что по фотографии фиг. 2 оказалось: $v = 230$ см/сек, $T = 0.3$ см и, наконец, $L = 100$ см, легко найти, что для дельфина приведенный шаг достигает, примерно, величины:

$$\frac{vT}{L} = 0.69$$

Для макрели он равнялся 0.45, для акулы 0.5 и даже для угря 0.57. Здесь снова всплывает преимущество дельфина перед рыбами: высокое значение приведенного шага свидетельствует о том, что и коэффициент полезного действия движителя у него должен быть чрезвычайно высок.[1]

---

[1] В. В. Шулейкин, цитированная работа.

## V. ŠULEJKIN (WAS SHOULEJKIN). KINEMATICS OF THE DOLPHIN


SUMMARY

1. The prime mover of a dolphin is all his body along which runs a wave of transverse oscillations from the head to the tail with a velocity $c$ exceeding that of the progressive motion of the dolphin itself in the water ($v$).

2. Differently from fish whose oscillations always proceed in the same plane, in the case of dolphin the solid wave proves to be polarised in a circle. In other words each section performs two oscillations at a time, one in the horizontal plane, according to the equation

$$y = a \cdot e^{-\beta x} \sin \gamma \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

and the other vertically according to the equation

$$z = a \cdot e^{-\beta x} \cos \gamma \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Here $y$ and $z$ correspondingly denote the momentary values of declinations from the equilibrium in horizontal and vertical directions. $\beta$ is the factor characterising the growth of the amplitudes during the transference from head to tail, $a$ — amplitude of the head, $x$ — the distance along the body from the front extremity of the head, $c$ — the velocity of the wave propagation, $t$ — current time and $\gamma$ — the factor connected to the oscillation period $T$ by means of the correlation

$$\gamma = \frac{2\pi}{T}$$

3. As it is known, the addition of the oscillations denoted by similar equations brings to circular motion around the initial axis. Besides the motion proceeds «without rotation» as shows the scheme of fig. 6.

4. Moving along circular orbites (fig. 7) each following section falls behind the phase for an angle proportional to the distance from the head ($x$). As a result, the polarised wave running down dolphin's body makes its axle (the spine) assume the shape schematically represented on fig. 8 (for ten phases, with interwals of one tenth $T$).

5. If the velocity of dolphin's motion ($v$) were equal to the velocity $c$ of the wave running down its body from the head to the tail, the harmful forces acting on his body would call forth and draugth only (see fig. 10).

6. As in fact $c > v$, there arises a harmful moment, incessantly trying to rotate dolphin's body around its longitudinal axis (in the direction opposite to that of the motion of the sections in figs 7 and 8).

7. The same harmful moment arises in the work of the screw propeller, and partly n the torpedo, where it is compensated by the moment of the second screw, working in a direction opposite. The tail fin of the dolphin can work for compensation if it is slightly curved along a spiral plane (left-handed).

8. The main compensation for the harmful relative motion has its origin in the asymmetry of the dolphin's head, stipulated in its turn by the asymmetry of the skull. The bones of the forehead prove to be curved spirally, the pitch of the screw being approximately equal to the length of the dolphin's body.

9. Thus the till now obscure purpose of the skull asymmetry of the dolphin and the other *Odontoceti* seems to be ascertained. A systematic investigation on the skull and head shapes of dolphins and other *Odontoceti* is begun by the Black Sea Hydrophysical Station.

10. An attempt of a quantitative characteristic of the dolphin's kinematics brings to figures attesting an a d v a n t a g e of the dolphin as compared to fish. For instance the velocity of the dolphin is nearer to the velocity of the solid wave propagated along its body $\left(\frac{c}{v}=1.46\right)$. The ratio of these velocities is whereas by the fish it is no less than 1.55; the reduced step of the dolphin $\frac{\text{(distance during one period)}}{\text{body length}}$ reaches 0.69 and that of the fish never exceeds 0.57.

Black Sea Hydrophysical Station.

# Оглавление — Sommaire



**Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала**

**Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original**

**Цена 3 руб. 50 коп.**